МОДЕЛЬ РАДИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА

MODEL RADIAL APPROXIMATIONS OF FILTERING BASED ON THE GREEN'S FUNCTIONS

С. С. Мирошниченко
Sergey S. Miroshnichenko

Ижевский государственный
технический университет
имени М.Т. Калашникова,
г. Ижевск, Российская Федерация

Kalashnikov Izhevsk State
Technical University,
Izhevsk, Russian Federation

К. А. Сидельников
Konstantin A. Sidelnikov

ЗАО «Ижевский нефтяной
научный центр»,
г. Ижевск, Российская Федерация

Izhevsk Petroleum Research
Center JSC,
Izhevsk, Russian Federation

В статье рассматривается задача аппроксимации решений дифференциальных уравнений, описывающих процесс двумерной фильтрации жидкости в пористой среде. Аппроксимация представлена в виде комбинации радиальных базисных функций на основе функции Грина, применяемой для решения уравнения Пуассона с переменными коэффициентами в случае стационарного режима фильтрации и уравнения параболического типа при нестационарном режиме. Для иллюстрации эффективности предлагаемой аппроксимации получено поле распределения давления в пласте с сетью нагнетательных и добывающих скважин. Сравнение аппроксимированного давления и расчетного указывает на удовлетворительную точность результатов. Выявлено, что полученная модель аппроксимации стационарного уравнения фильтрации с использованием в качестве базисных функций Грина предоставляет среднеквадратичное отклонение аппроксимированного давления от расчетного на уровне 0,95–1,05 %. Этот тип базисных функций применяется при построении аппроксимирующих моделей для нестационарных режимов многофазной фильтрации. Максимальные отклонения наблюдаются именно в этих ячейках, где происходят наиболее резкие (пиковые) изменения давления. Граничные условия Неймана, как это следует из представленных результатов, выполняются. Следует отметить, что граничные условия Неймана, особенно для всех границ, являются наиболее сложным расчетным случаем.

Для аппроксимирования нестационарного решения уравнения фильтрации используется функция Грина, которая показана в виде произведения двух частей: одна часть экспоненциально зависит только от времени; вторая часть зависит только от пространственных координат. Применение фоновой интенсивности источников сделало возможным выстроить аппроксиматоры для возможностей нестационарного преобразования интенсивности источников и при ненулевом равновесии интенсивностей.

The article discusses the problem of approximating solutions of differential equations describing the process of a two-dimensional fluid flow in porous media. The approximation is presented as a combination of radial basis functions based of the Green's function used to solve the Poisson equation with variable coefficients in the case of steady state filtration and parabolic equations in the transient regime. To illustrate the effectiveness of the proposed approximation obtained by the field pressure distribution in the reservoir with a network of injection and production wells. Comparing of approximated pressure and design points to a satisfactory accuracy of the results.

Ключевые слова

аппроксимация,
функция Грина, двумерная
фильтрация жидкости,
пористая среда,
поле давления в пласте

Key words

approximation, Green's function,
two-dimensional fluid filtration,
porous medium,
pressure field in the reservoir

It is revealed that the obtained model of approximation of the stationary filtration equation using Green as the basis functions provides the root-mean-square deviation of the approximated pressure from the calculated one at the level of 0.95–1.05 %. This type of basis functions is used in constructing approximating models for non-stationary modes of multiphase filtration. The maximum deviations are observed precisely in these cells, where the most abrupt (peak) pressure changes occur. The Neumann's boundary conditions, as follows from the presented results, are satisfied. It should be noted that the Neumann boundary conditions, especially for all boundaries, are the most complicated computational case.

To approximate the nonstationary solution of the filtration equation, the Green function is used, which is shown as a product of two parts: one part only depends exponentially on time; the second part depends only on the spatial coordinates. The use of the background intensity of the sources made it possible to build approximators for the possibilities of non-stationary transformation of the intensity of the sources even with a non-zero equilibrium of the intensities.

Рассмотрим возможность аппроксимации решений дифференциальных уравнений на примере двумерной фильтрации. Для описания процесса двумерной фильтрации жидкости в пористой среде используем следующую краевую задачу:

$$\nabla(h(\mathbf{r})\lambda(\mathbf{r})(\nabla P - \gamma \nabla Z(\mathbf{r}))) = -h(\mathbf{r}) \sum_{l=1}^L q_l(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l), \quad (1)$$

с граничными условиями Неймана $\left. \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0$,

где $\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r})}{\mu}$, $\gamma = \rho g$, $\mathbf{r} \in \Omega \subset \bar{\Omega}^2$; $P(\mathbf{r})$ — давление в точке $\mathbf{r} = (x, y) \in \Omega$; $\bar{\Omega}$ — область фильтрации с границей Γ ; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали; $\mathbf{k} = \text{diag}(k_1, k_2)$ — диагональный тензор абсолютной проницаемости; h — мощность пласта; Z — глубина залегания; μ — вязкость жидкости; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; $\mathbf{x}_l$ — координаты мест размещения l -й скважины с дебитом q_l , $l = \overline{1, L}$; L — количество скважин; $\delta(\cdot)$ — обобщенная двумерная функция Дирака.

Уравнение (1) представляет собой уравнение Пуассона с переменными коэффициентами. Для обычного уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -Q, \quad (2)$$

$\mathbf{r} = (x, y) \in D$, если D вся плоскость, можно записать решение с помощью функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ [1]:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) Q(\mathbf{p}) d\sigma(\mathbf{p}), \quad (3)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{p}|}$. (4)

Подобное представление в случае точечных источников рассмотрено в книге К. С. Басниева [2] и названо решением об интерференции скважин. При постоянных коэффициентах и изотропии в уравнении (1) решение (3) имеет вид:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{kP}{\mu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^L q_l \ln |\mathbf{r} - \mathbf{p}_l|, \quad (5)$$

где q_l — дебит скважины.

В случае переменных коэффициентов выражение (5) приводит к значительной погрешности. Поэтому предлагается вид функции Грина (4) использовать в качестве радиальных базисных функций $G(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|)$ и на основе их линейной комбинации записывать аппроксимацию решения уравнения (1). Коэффициенты линейной комбинации следует подбирать исходя из известного решения, полученного численно на конечно-разностной сетке. Рассмотрим прямоугольную область $D = [a, b; c, d]$ и разобьем на конечные ячейки $\Delta x = \frac{b-a}{n_x}$, $\Delta y = \frac{d-c}{n_y}$, где $n_x \times n_y$ — размерность сетки.

Решение уравнения (1), полученное численно конечно-разностным методом, обозначим P_{ij} , $i = \overline{1, n_x}$; $j = \overline{1, n_y}$, а аппроксимацию этого решения P_{ij}^a , $i = \overline{1, n_x}$; $j = \overline{1, n_y}$. Аппроксимацию представим в виде линейной комбинации радиальных функций $G(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|)$. Радиальная функция имеет особенность в ячейке, содержащей источник при $\mathbf{r} = \mathbf{p}$. Поэтому в этой точке ее значение полагаем равным некоторой константе, определяемой размером ячейки [3–5], например $G_{ii} = -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{\Delta x \Delta y})$.

Аппроксимирующее выражение в этом случае принимает вид:

$$P_{ij}^a = P_k^a = \sum_{l=1}^L \left[\alpha_l \delta_{il} \frac{G_{il}}{\lambda_l} + \beta_l (1 - \delta_{lk}) \frac{G_{kl}}{\lambda_k} \right] q_l \Delta x \Delta y, \quad (6)$$

$$\text{где } G_{kl} = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} -\ln(\sqrt{\Delta x \Delta y}), & |l = k \\ \ln \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{p}_l|}, & |l \neq k \end{cases}, \quad \delta_{lk} = \begin{cases} 1 & |l = k \\ 0 & |l \neq k \end{cases}. \quad (7)$$

Источники могут иметь разные знаки. Здесь принимаются положительный источник — нагнетающая скважина, отрицательный — добывающая. Вводится также индекс k , соответствующий точке $r_{ij}, i = \overline{1, n_x}; j = \overline{1, n_y}$; α_l, β_l — коэффициенты, подлежащие определению из условия $\sum_{k=1}^N (P_k - P_k^a)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta}$, где $N = n_x n_y$.

Для учета граничных условий Неймана выражение (6) следует дополнить источниками — антиподами, расположенными за границей расчетной области. Каждому источнику ставится в соответствие четыре источника — антипода $q_l^m, l = \overline{1, L}; m = \overline{1, 4}$. Координаты этих источников определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_l^1 &= (a - x_l, y_l), \quad \mathbf{p}_l^2 = (x_l, 2d - y_l), \\ \mathbf{p}_l^3 &= (2b - x_l, y_l), \quad \mathbf{p}_l^4 = (x_l, c - y_l); \end{aligned}$$

и перепишем (6) в виде

$$P_k^a = \sum_{l=1}^L \left[\alpha_l \delta_{il} \frac{G_{il}}{\lambda_l} + \beta_l (1 - \delta_{lk}) \frac{G_{kl}}{\lambda_k} \right] q_l \Delta x \Delta y + \sum_{m=1}^4 \sum_{l=1}^L \beta_l (1 - \delta_{lk}) \frac{G_{kl}}{\lambda_k} q_l \Delta x \Delta y.$$

Примем обозначения:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \mathbf{M} \\ P_N \end{bmatrix} \text{ — вектор известных значений;}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{M} \\ \alpha_L \\ \beta_1 \\ \mathbf{M} \\ \beta_L \end{bmatrix} \text{ — вектор неизвестных коэффициентов;}$$

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\delta_{il} G_{il}}{\lambda_{il}} \right], l = \overline{1, L},$$

$$\mathbf{B} = \left[(1 - \delta_{lk}) \frac{G_{kl}}{\lambda_k} \right], l = \overline{1, L}; k = \overline{1, L},$$

$$\mathbf{C} = \left[(1 - \delta_{lk}) \frac{G_{kl}}{\lambda_k} \right] + \sum_{m=1}^4 (1 - \delta_{lk}) \frac{G_{kl}}{\lambda_k} \left[\frac{G_{kl}}{\lambda_k} \right],$$

$l = \overline{1, 2L}; k = \overline{1, N}$ — вычисленные матрицы. Из матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ составим блочную матрицу:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} = [g_{kl}], k = \overline{1, N}; l = \overline{1, 2L}.$$

Матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ — квадратные, матрицы $\mathbf{C}, \mathbf{G}$ — прямоугольные ($N > 2L$).

Из условия минимума среднеквадратичного отклонения получим матричное уравнение:

$$\mathbf{G}\mathbf{X} = \mathbf{d}. \quad (8)$$

Умножим слева уравнение (8) на транспонированную матрицу $\mathbf{G}^T$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{X} = \mathbf{G}^T \mathbf{d}.$$

Для квадратной матрицы $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ вычислим обратную и получим уравнение для нахождения неизвестных коэффициентов:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (9)$$

Операцию $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T = \mathbf{G}^+$ еще называют операцией псевдоинверсии [6], а схему аппроксимации с применением радиальных функций — радиальной нейронной сетью.

Радиальный аппроксиматор теперь имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{G}\mathbf{X}. \quad (10)$$

Коэффициенты $\mathbf{X}$ вычисляются для какого-либо варианта расположения источников и их интенсивностей. Затем аппроксиматор (10) используется для произвольного расположения и интенсивности источников. Количество источников должно быть меньше или равно L . При расчете для меньшего количества источников интенсивность лишних приравняется нулю. Если рассматриваются граничные условия Неймана, то материальный баланс по источникам должен быть нулевым.

В качестве иллюстрации предлагаемой аппроксимации рассмотрим следующий пример. Расчетная область $D = [a, b; c, d]$, $a = 0$; $b = 1000$ м; $c = 0$; $d = 1000$ м разбита на ячейки разностной сеткой 256×256 . Толщина пласта изменяется по закону $h(\mathbf{r}) = 10 * (1 + 0.1 * \sin(4\pi(x+y)))$, коэффициент $\lambda(\mathbf{r}) = 10^{-9} (1 + 0.2 \sin(2\pi x) + 0.15 \cos(2\pi y))$. В области находятся 10 скважин: 5 добывающих и 5 нагнетательных. Для обучения абсолютные значения интенсивностей источников равны между собой $Q = 50 \frac{m^3}{s}$. Размещение источников в области выбрано случайным.

Расчет значений давлений в ячейках проведен многосеточным методом на 7-ми вложенных сетках.

На рисунке 1 показано распределение относительного давления $p = \frac{P - P^{\min}}{P^{\max} - P^{\min}}$ в рас-

Рисунок 1. Распределение давления, полученное конечно-разностным методом

Рисунки 2 и 3, на которых приведено сравнение давлений в среднем сечении, показывают достаточно удовлетворительную аппроксимацию.

Затем снова задано другое случайное расположение источников и случайным же образом заданы интенсивности источников. На рисунке 4 показано сравнение расчетного и аппроксимированного давлений по среднему

сечению расчетной области для этого распределения источников.

Можно видеть, что радиальная сеть обучена хорошо и обеспечивает аппроксимацию данных, не участвовавших в обучении. Сравнение расчетных и аппроксимированных давлений для всех ячеек области представлено на рисунке 5.

Рисунок 2. Распределение аппроксимированного давления

сечению расчетной области для этого распределения источников.

Можно видеть, что радиальная сеть обучена хорошо и обеспечивает аппроксимацию данных, не участвовавших в обучении. Сравнение расчетных и аппроксимированных давлений для всех ячеек области представлено на рисунке 5.

Рисунок 3. Сравнение расчетного и аппроксимированного давлений по среднему сечению расчетной области

Рисунок 4. Сравнение расчетного и аппроксимированного давлений по среднему сечению расчетной области для другого распределения источников

Рисунок 5. Сравнение относительных расчетных и аппроксимированных давлений

Среднеквадратичное отклонение аппроксимированного давления от расчетного составляет 0,95 %. На рисунке 5 крестиками отмечены давления в ячейках, содержащих источники. Максимальные отклонения наблюдаются именно в этих ячейках, где происходят наиболее резкие (пиковые) изменения давления. Граничные условия Неймана, как это следует из представленных результатов, выполняются. Следует отметить, что граничные условия Неймана, особенно для всех границ, являются наиболее сложным расчетным случаем.

Аппроксимации нестационарного уравнения фильтрации

При учете сжимаемости фильтрующей жидкости и зависимости пористости породы от давления уравнение (1) становится уравнением параболического типа:

$$\nabla(h(\mathbf{r})\lambda(\mathbf{r})(\nabla P - \gamma \nabla Z(\mathbf{r}))) = h(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r})\frac{\partial P}{\partial t} - h(\mathbf{r})\sum_{l=1}^L q_l(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l), \quad (11)$$

$$\text{где } \lambda(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r})}{\mu B}; \quad \beta(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{r})\frac{c_1}{B^\circ} + \varphi^\circ(\mathbf{r})\frac{c_\varphi}{B};$$

$$\rho = \rho^\circ(1 + c_1(P - P^\circ)),$$

$$B = \frac{B^\circ}{1 + c_1(P - P^\circ)}, \quad \mu = \frac{\mu^\circ}{1 - c_\mu(P - P^\circ)},$$

$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^\circ(\mathbf{r})(1 + c_\varphi(P - P^\circ))$, $\varphi(\mathbf{r})$ — пористость; B — объемный коэффициент; P° — характерное давление. Задача (11) дополняется начальным условием

$$P(0, \mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Для модельного уравнения параболического типа

$$\nabla^2 \Phi = \alpha^2 \frac{\partial P}{\partial t} + f(t, \mathbf{r}), \quad \Phi(0, \mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) \quad (13)$$

также можно записать решение через функцию Грина [1]:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \int_0^t \int_V G(t, \mathbf{r}; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau dV(\xi) - \alpha^2 \int_V G(t, \mathbf{r}; 0, \xi) \Phi_0(\xi) dV(\xi), \quad (14)$$

где $G(t, \mathbf{r}; \tau, \xi)$ — функция Грина, которая выражается через собственные функции ψ_k и собственные числа λ_k уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \lambda \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V,$$

$$G(t, \mathbf{r}; \tau, \xi) = -\frac{1}{\alpha^2} \sum_k e^{\frac{\lambda_k}{\alpha^2}(t-\tau)} \bar{\psi}_k(\xi) \psi_k(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Формулы (14), (15) можно взять за основу для аппроксимации решения уравнения (11). Важным является то, функция Грина (15) может быть представлена в виде произведения

двух частей (разделение переменных): одна часть экспоненциально зависит только от времени; вторая часть зависит только от пространственных координат.

Предположим сначала, что интенсивность точечных источников не зависит от времени, а в формуле (15) ограничимся одним слагаемым. Формулу (15) перепишем в виде

$$G(t, \mathbf{r}; \tau, \xi) = -\frac{1}{a^2} e^{-\frac{\lambda}{a^2}(t-\tau)} \Psi(\xi, \mathbf{r}),$$

где $\Psi(\xi, \mathbf{r})$ — некоторая функция, которую необходимо построить для аппроксимации.

Интегрирование (14) по времени дает:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{(1 - e^{-\frac{\lambda}{a^2}t})}{\lambda} \int_V \Psi(\xi, \mathbf{r}) f(\xi) dV(\xi) + e^{-\frac{\lambda}{a^2}t} \int_V \Psi(\xi, \mathbf{r}) \Phi_0(\xi) dV(\xi). \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что в решении нестационарного уравнения (13) имеется стационарная составляющая

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \int_V \Psi(\xi, \mathbf{r}) f(\xi) dV(\xi),$$

к которому асимптотически стремится решение (6) при $t \rightarrow \infty$. Вторая составляющая $e^{-\frac{\lambda}{a^2}t} \int_V \Psi(\xi, \mathbf{r}) \Phi_0(\xi) dV(\xi)$ при $t \rightarrow 0$ соответствует начальному условию. На основании изложенного задача аппроксимации решается в два этапа. Сначала подбирается функция-аппроксиматор для стационарного (предельного при $t \rightarrow \infty$) состояния. В качестве этой функции берется радиальная функция вида (7), которую обозначим $G_s(\xi, \mathbf{r})$. Во втором слагаемом (16) для удовлетворения начального условия примем единичное интегральное преобразование. Затем подбирается параметр λ , характеризующий нестационарность процесса. Для лучшей аппроксимации по времени можно взять несколько членов ряда в (15) и записать функцию Грина в виде:

$$G(t, \mathbf{r}; \tau, \xi) = -\frac{1}{a^2} \sum_k e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}(t-\tau)} \Psi(\xi, \mathbf{r}),$$

а решение (16) переписать:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \sum_k \frac{(1 - e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}t})}{\lambda_k} \int_V G_s(\xi, \mathbf{r}) f(\xi) dV(\xi) + \sum_k e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}t} \Phi_0(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Отметим, что эти действия не являются строго математически обоснованными, а

нужны лишь для выбора типа базисных функций при построении аппроксиматора.

Рассмотрим случай, когда $\sum_{l=1}^L h(\mathbf{r}_l) q_l = \delta q \neq 0$.

Стационарного решения уравнения (11) при $\frac{\partial P}{\partial t} \rightarrow 0$ не существует при граничных условиях Неймана. Для построения функции $G_s(\xi, \mathbf{r})$ введем фоновую интенсивность

$$\Delta q_{ij} = -\frac{\sum_{l=1}^L h(\mathbf{r}_l) q_l}{(b-a)(d-c)} \Delta x_i \Delta y_j, i = \overline{1, n_x}; j = \overline{1, n_y}$$

для каждой разностной ячейки расчетной области. Теперь можно определить соответствующее стационарное состояние и подобрать функцию $G_s(\xi, \mathbf{r})$, описывающую это состояние. Формула (17) примет вид:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \sum_k \frac{(1 - e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}t})}{\lambda_k} \int_V G_s(\xi, \mathbf{r}) f(\xi) dV(\xi) + \sum_k e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}t} \Phi_0(\mathbf{r}) + \frac{\delta q}{a^2} t.$$

В случае, если функция источника зависит от времени $f(t, \mathbf{r})$, то рассматриваемый нестационарный процесс делится на временные отрезки с шагом Δt^n , как при конечно-разностном представлении, и записывается аппроксимирующее выражение для давления:

$$P^a(t^{n+1}, \mathbf{r}) = \sum_k \frac{(1 - e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}t})}{\lambda_k} \int_V G_s(\xi, \mathbf{r}) f(t^{n+1}, \xi) dV(\xi) + \sum_k \left(e^{-\frac{\lambda_k}{a^2}t} \right)^{n+1} P^a(t^n, \mathbf{r}) + \left(\frac{\delta q}{a^2} t \right)^{n+1}, \quad (18)$$

где $a^2 = h(\mathbf{r}) \beta(\mathbf{r})$; $f(t, \mathbf{r}_l) = h(\mathbf{r}) \sum_{l=1}^L q_l(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)$.

Для одного слагаемого формулу (18) можно записать в виде:

$$P^a(t^n, r_{ij}) = \theta_0(t^n, r_{ij}) + \theta_1(t^n, r_{ij}) e^{-\frac{\lambda}{a_{ij}^2} t^n}.$$

Из условия $\sum_{i,j,n} (P^a(t^n, r_{ij}) - P(t^n, r_{ij}))^2 \rightarrow \min_{\lambda}$ получим выражение для определения коэффициента λ по результатам расчетов P_{ij}^n по конечно-разностному методу:

$$\lambda = -\frac{1}{N n_x n_y} \sum_{ij,n} \frac{a_{ij}^2}{t^n} \ln \frac{P_{ij}^n - \theta_{0ij}^n}{\theta_{1ij}^n},$$

где P_{ij}^n — расчетные значения давления; N — количество шагов по времени. Результаты расчетов показали, что для большинства рассмотренных вариантов $\lambda \approx 0,25$.

1 — $\bar{t}=0,2$; 2 — $\bar{t}=0,4$; 3 — $\bar{t}=0,6$; 4 — $\bar{t}=0,8$

Рисунок 6. Сравнение расчетного и аппроксимированного давлений по среднему сечению расчетной области при нестационарном режиме

Рассмотрим те же самые условия для расчета, как в стационарном случае. Дополнительно принято, что пористость $\varphi^o = 0,15$; коэффициенты $c_\varphi = 10^{-4}$, $c_l = 2 \cdot 10^{-4}$, $c_\mu = 0$. Стационарная функция $G_s(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ взята по результатам предыдущего обучения. Материальный дисбаланс источников составил $Q = 39 \text{ m}^3/\text{s}$. Получено значение коэффициента $\lambda = 0,27$. На рисунке 6 показано сравнение

расчетного и аппроксимированного давлений в разные моменты относительного времени для среднего сечения.

Сплошные линии соответствуют рассчитанному по конечно-разностному методу давлению, кружки — аппроксимированному давлению. Сравнение относительных расчетных и аппроксимированных давлений по всем точкам представлено на рисунке 7.

Рисунок 7. Сравнение относительных расчетных и аппроксимированных давлений

Среднеквадратичное отклонение аппроксимированного давления от расчетного составляет 1,84 %, что примерно в два раза больше, чем для стационарного режима.

Выводы

1. Разработанная модель радиальной аппроксимации стационарного уравнения фильтрации с применением в качестве базисных

функций Грина обеспечивает среднеквадратичное отклонение аппроксимированного давления от расчетного на уровне 0,95–1,05 %. Этот тип базисных функций применяется при построении аппроксимирующих моделей для нестационарных режимов многофазной фильтрации.

2. Для аппроксимации нестационарного решения уравнения фильтрации применяется функция Грина, представленная в виде произведения двух частей (разделение переменных): одна часть экспоненциально зависит только от времени; вторая часть зависит

только от пространственных координат. Использование фоновой интенсивности источников позволило построить аппроксиматоры для случаев нестационарного изменения интенсивности источников и при ненулевом балансе интенсивностей.

СПИСОК ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
3. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 128 с.
4. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
5. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
6. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.

REFERENCES

1. Korn G.A., Korn T.M. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Math Handbook for

Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1974.

832 p. [in Russian].

2. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground Hydrodynamics]. Moscow, Nedra Publ., 1993. 416 p. [in Russian].

3. Kanevskaya R.D. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamicheskikh processov razrabotki mestorozhdenij uglevodorodov* [Mathematical Modeling of Hydrodynamic Processes of Hydrocarbon Deposit Development]. Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2003. 128 p. [in Russian].

4. Yevtushenko Yu.G. *Metody resheniya ehkstre-mal'nykh zadach i ih primeneniye v sistemah optimizatsii* [Methods for Solving Extremal Problems and Their Application in Optimization Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 432 p. [in Russian].

5. Aziz K., Settari A. *Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem* [Mathematical Modeling of Reservoir Systems]. Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2004. 416 p. [in Russian].

6. Osowski S. *Nejronnye seti dlya obrabotki informatsii* [Neural Networks for Information Processing]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2002. 344 p. [in Russian].

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ ABOUT THE AUTHORS

Мирошниченко Сергей Сергеевич, аспирант кафедры дистанционного обучения, Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Российская Федерация

Sergey S. Miroshnichenko, Post-graduate Student of Distance Learning Department, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation

e-mail: lurokpro@gmail.com

Сидельников Константин Анатольевич, главный специалист отдела контроля энергетического состояния пластов, ЗАО «Ижевский нефтяной научный центр», г. Ижевск, Российская Федерация

Konstantin A. Sidelnikov, Chief Specialist of Reservoirs Energy State Department, Izhevsk Petroleum Research Center JSC, Izhevsk, Russian Federation

e-mail: KASidelnikov@udmurtneft.ru