ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА СО СКОЛЬЗЯЩЕЙ ОПОРОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

SPATIAL VIBRATIONS OF A PIPELINE HAVING A SLIDING SUPPORT UNDER THE ACTION OF VARIABLE INTERNAL PRESSURE

А. Г. Хакимов
Akim G. Khakimov

М. М. Шакирьянов
Marat M. Shakiryaynov

Институт механики
им. Р.Р. Мавлютова Уфимского
федерального исследовательского
центра Российской академии наук,
г. Уфа, Российская Федерация

Институт механики
им. Р.Р. Мавлютова Уфимского
федерального исследовательского
центра Российской академии наук,
г. Уфа, Российская Федерация

R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics,
Ufa Federal Scientific Center,
Russian Academy of Sciences,
Ufa, Russian Federation

R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics,
Ufa Federal Scientific Center,
Russian Academy of Sciences,
Ufa, Russian Federation

Исследуются пространственные колебания трубопровода со скользящей невесомой опорой под действием переменного внутреннего давления. Колебания трубопровода происходят вокруг оси, проходящей через две опоры, одна из которых считается неподвижной, а другая свободно скользит по идеально гладкой горизонтальной плоскости. Труба, заполненная несжимаемой транспортируемой средой, окружена вязкой несжимаемой жидкостью. Внутреннее давление в трубопроводе задается по гармоническому закону. Учитываются силы гравитации, силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда, силы вязкого сопротивления и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде. При этом не учитываются скорость движения транспортируемой среды, трение потока и продольные силы инерции. Также предполагаются малыми деформации трубы, связанные с ее выходом из плоскости изгиба. Поэтому пространственные колебательные движения трубопровода рассматриваются как состоящие из переносных вращательных движений вокруг оси, проходящей через опоры, и относительных изгибных перемещений в плоскости изгиба. В результате принятия указанных допущений решение задачи приводится к интегрированию системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих вращательные и изгибные колебания трубопровода. Функция, удовлетворяющая граничным условиям, берется по первой основной форме. Далее применением процедуры Бубнова-Галеркина эта система сводится к двум нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно угла поворота и прогиба средней точки пролета трубы от времени. Для интегрирования полученной системы уравнений при конкретных начальных условиях применяется численный метод Рунге-Кутты. Затем к этому численному решению применяются дискретное преобразование Фурье и отображение Пуанкаре.

Вычисления проводились для стального трубопровода, заполненного жидкостью и газом. Трубопровод совершал колебания в воздушной и водной средах. Величина среднего, амплитуда и начальная фаза переменной составляющей внутреннего давления принимали по единственному значению, а частота этого давления принимала три значения. Результаты вычислений приведены в виде графических зависимостей динамической составляющей прогиба средней точки пролета, угла поворота и перемещения скользящей опоры трубы от времени, представлены их фазовые картины, Фурье-спектры и отображения Пуанкаре. Для более зримого представления трубопровода в пространстве в рассматриваемом отрезке времени построены также траектории средней точки пролета.

Ключевые слова

трубопровод,
пространственные
колебания,
статическое
и переменное
внутреннее
давление,
начальная фаза,
амплитуда,
частота,
скользящая опора

This paper studies spatial vibrations of a pipeline having a sliding 'weightless' support under the action of variable internal pressure. The pipeline vibrations occur around an axis running through two supports, one of which is assumed to be immovable and the other slides freely on an ideally smooth horizontal plane. The pipe filled with an incompressible transport medium is surrounded by a viscous incompressible fluid. The internal pressure in the pipeline is given by the harmonic law. Gravitational forces, Coriolis inertial forces, Archimedes buoyant force, viscous drag forces and those associated with the acceleration of the pipe transverse motion in the surrounding medium are taken into account. In this case the velocity of the transport medium motion, flow friction and linear inertial forces are not taken into account. Deformations of the pipe due to its exit out of the flexure plane are assumed to be small. That is why, spatial vibrational movements of the pipeline are considered to consist of transferable rotational movements around the axis running through the supports and relative flexural displacements in the flexure plane. As a result of these assumptions, the solution to the problem is reduced to integrating a set of two nonlinear partial differential equations describing rotational and flexural vibrations of the pipeline. The function that satisfies the boundary conditions is taken according to the first basic mode. Then using the Bubnov-Galerkin procedure, this set is reduced to two nonlinear ordinary differential equations regarding the bending angle and deflection at mid-span of the pipe in terms of time. The Runge-Kutt numerical method is applied to integrate the resultant set of equations under specific initial conditions. This numerical solution is then subjected to the discrete Fourier transform and Poincare mapping.

Calculations were performed for a steel pipeline filled with fluid and gas. The pipeline executed vibrations in air and water media. The magnitude of the average, the amplitude and the initial phase of the internal pressure variable component took the only one value each, and the frequency of this pressure took three values. The computational results are given as time-dependence graphs of the mid-span deflection dynamic constituent, bending angle and sliding support displacement, their phase pattern, Fourier spectra and Poincare maps. The mid-span trajectories are also constructed to give a more visual representation of the pipeline in space over a given time interval.

Key words

pipeline,
spatial vibrations,
static and variable
internal pressure,
initial phase,
amplitude,
frequency,
sliding support

Трубопроводные системы, служащие в инженерных установках для транспортировки жидкостей и газов, при действии внешних и внутренних сил могут совершать пространственные колебания. При определенных условиях колебания трубопровода могут быть как периодическими, так и непериодическими. Они могут усиливаться или ослабевать. Поэтому задача изучения пространственных колебаний трубопровода является актуальной проблемой и имеет практический интерес.

Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ, рассматривались в [1]. Общие вопросы теории изгиба трубопроводов и шлангов развиты в [2]. В [3, 4] рассмотрена механика колебательного движения трубопровода, транспортирующего жидкость. Вопросам стабилизации колебаний и предупреждению аварий в трубопроводах уделялось внимание в [5, 6].

В настоящей работе приводится лишь краткий обзор исследований, посвященных изучению влияния постоянного и переменного по времени внутреннего давления на изгиб трубопровода. В [7–9] теоретически и экспериментально изучено влияние внутреннего перепада давления в трубопроводе на его статический изгиб. Упругая реакция трубопро-

вода на внутреннее ударное давление рассмотрена в [10]. В [11] исследованы поперечные колебания трубы в вертикальной плоскости под действием бегущей волны в жидкости, а в [12] — с равномерно текущей жидкостью. Колебания трубопровода с жидкостью, текущей со сверхкритической скоростью, исследовались в [13, 14]. Влияние пульсаций давления в жидкости, текущей внутри трубы, на ее колебательные движения изучалось, например, в [15–17]. В [18] рассмотрено влияние изменения плотности текущей жидкости на нелинейную динамику трубы. Пространственные колебания трубопровода с неподвижными опорами в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления исследовались в [19–22].

Рассматриваются пространственные колебания трубы и заключенной в ней жидкости относительно горизонтальной оси x , проходящей через опоры (рисунок 1).

Левый конец трубы прикреплен к неподвижному цилиндрическому шарниру, а правый — к невесомой опоре, свободно скользящей по горизонтальной плоскости. Длина трубы, ее внутренний радиус и толщина стенки L , R_i и h , а суммарная масса однородной трубы и жидкости — m . Труба окружена

Рисунок 1. Расчетная схема трубопровода со скользящей опорой

вязкой несжимаемой средой. В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием постоянного внутреннего давления. Из этого положения труба выводится путем отклонения на угол θ_0 и сообщения ей начальной угловой скорости ω_0 . Далее совершается свободное вращение трубопровода вокруг оси x . Деформации трубопровода, связанные с выходом его оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми [1]. Поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. Малыми считаются также продольные деформации трубы. Согласно принятым предположениям, пространственное движение трубопровода можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного вращения вокруг оси x , проходящей через опоры, и относительного движения в плоскости изгиба [20]. Учитываются силы гравитации, силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда, силы вязкого сопротивления, пропорциональные первой степени скорости, и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде.

На рисунке 1 изображены угол θ поворота плоскости изгиба и полный прогиб $W(x,t)$ элемента трубы длиной dx (а) и массой $dm = (m/L)dx$, скорости и ускорения выделенного элемента (б), а также силы, действующие на него (в). Здесь V_a и a_a — абсолютные; V_r и a_r — относительные; V_e и a_e , a_n — переносные скорости и ускорения; a_k — ускорение Кориолиса; gdm — сила тяжести; dA — сила Архимеда; $d\Phi_r$, $d\Phi_t$, $d\Phi_n$ и $d\Phi_k$ — относительная, касательная, нормальная силы инерции и сила инерции Кориолиса; dR_r и dR_e — взаимно перпендикулярные составляющие силы dR вязкого сопротивления; $d\Phi_r'$, $d\Phi_t'$, $d\Phi_n'$ и $d\Phi_k'$ — составляющие силы сопротивления сплошной среде ускоренному движению элемента трубы; g — гравитационное ускорение. В [20] даны следующие выражения скоростей, ускорений элемента трубы и действующих на него сил:

Здесь $dm' = \pi \rho_c (R_i + h)^2 dx$, ρ_c и μ — элементарная присоединенная масса, плотность и коэффициент сопротивления окружающей среды.

$$V_r = \partial W / \partial t, \quad V_e = W(d\theta/dt),$$

$$dR_r = \mu V_r, \quad dR_e = \mu V_e, \quad (1)$$

$$a_r = \partial^2 W / \partial t^2, \quad a_t = W d^2 \theta / dt^2, \quad a_n = W(d\theta/dt)^2,$$

$$a_k = 2(d\theta/dt)(\partial W / \partial t), \quad (2)$$

$$d\Phi_r = a_r dm, \quad d\Phi_t = a_t dm, \quad d\Phi_n = a_n dm,$$

$$d\Phi_k = a_k dm, \quad dA = \pi g \rho_c (R_i + h)^2 dx, \quad (3)$$

$$d\Phi_r' = a_r dm', \quad d\Phi_t' = a_t dm',$$

$$d\Phi_n' = a_n dm', \quad d\Phi_k' = a_k dm'. \quad (4)$$

Коэффициент μ вязкого сопротивления окружающей среды определяется формулой, приведенной в [24]:

$$\mu = 4\pi\mu_0 / [\ln k - (k^2 - 1) / (k^2 + 1)], \quad (5)$$

где $k = R_* / (R_i + h)$, R_* — радиус зоны возмущений, вызываемых движением цилиндра; μ_0 — коэффициент динамической вязкости среды.

В [20] также приведены дифференциальные уравнения вращательного движения (16) и изгибных колебаний (17) трубопровода с неподвижными опорами. В случае когда одна из опор неподвижна, а другая свободно скользит по горизонтальной плоскости, дифференциальное уравнение вращательного движения трубы сохраняет свой вид, но дифференциальное уравнение ее изгибных колебаний претерпевает изменение. Это изменение связано с отсутствием продольной деформации трубопровода.

Относительная продольная деформация ε_{xx} определяется формулой [25]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2. \quad (6)$$

Здесь $U(x, t)$ — продольное перемещение элемента трубопровода.

Отметим, что функции $U(x, t)$ и $W(x, t)$ должны удовлетворять граничным условиям:

$$U(0, t) = 0, W(0, t) = 0, W(L, t) = 0, \quad (7)$$

$$\partial^2 W(0, t) / \partial x^2 = 0, \partial^2 W(L, t) / \partial x^2 = 0. \quad (8)$$

Согласно закону Гука, продольное усилие T равно произведению

$$T = EF\varepsilon_{xx}, \quad (9)$$

где E — модуль Юнга материала; $F = \pi[(R_i + h)^2 - R_i^2]$ — площадь поперечного сечения трубы.

Из равенства нулю соотношения (6) следуют равенство нулю продольного усилия (9) и связь между продольным перемещением $U(x, t)$ и прогибом $W(x, t)$ элемента трубы:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2. \quad (10)$$

С учетом неподвижности левой опоры (7) горизонтальные перемещения u_0 средней точки пролета и u скользящей опоры трубы определяются интегралами:

$$\begin{aligned} & - \int_{(m)} W \sin \theta (dmg - dA) - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_r - \int_{(m)} W d\Phi'_r - \\ & - \int_{(m)} W d\Phi_k - \int_{(m)} W d\Phi'_k - \int_{(m)} W dR_e = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в уравнении (17) [20] продольное усилие T принимаем равным нулю.

Тогда дифференциальные уравнения вращательных и изгибных колебаний трубы со скользящей опорой запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dm &= -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - p_i F_i \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \\ &+ g_1 \cos \theta dm + d\Phi_n + d\Phi'_n - dR_r - d\Phi'_r, \\ J &= \pi[(R_i + h)^4 - R_i^4] / 4, \quad F_i = \pi R_i^2, \\ g_1 &= g(1 - m' / m), m' = \pi \rho_c (R_i + h)^2 Lg, \end{aligned} \quad (12)$$

где $M_u = J_p d^2 \theta / dt^2$ и $J_p = \pi \rho_p L[(R_i + h)^4 - R_i^4] / 2$ — главный момент сил инерции и момент инерции трубы относительно ее собственной оси; ρ_p — плотность материала трубы; p_i — внутреннее давление в трубе; t — время.

Внутреннее давление в трубе задается в виде:

$$p_i = p_0 + p_a \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad (13)$$

где Ω , φ_0 , p_0 и p_a — круговая частота, начальная фаза, среднее давление и его амплитуда колебаний.

Функция полного прогиба W , удовлетворяющая граничным условиям, берется по первой основной форме

$$W(x, t) = [W_0 + w(t)] \sin(\pi x / L), \quad (14)$$

где W_0 и $w(t)$ — амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета.

Дифференциальные уравнения (12) вращательных и изгибных колебательных движений трубопровода с учетом указанных выше сил и функций (13), (14) после применения ко второму уравнению процедуры Бубнова-Галеркина примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \left\{ \frac{m + m'}{2} [W_0 + w(t)]^2 + J_p \right\} &+ \frac{\mu L}{2} \frac{d\theta}{dt} [W_0 + w(t)]^2 + \\ &+ [W_0 + w(t)] \left[\frac{2mg_1}{\pi} \sin \theta + (m + m') \frac{d\theta}{dt} \frac{dw}{dt} \right] = 0, \\ \frac{m + m'}{L} \frac{d^2 w}{dt^2} + \mu \frac{dw}{dt} &+ \frac{\pi^4 EJ}{L^4} [W_0 + w(t)] = \\ &= \frac{m}{L} \left\{ \frac{4g_1}{\pi} \cos \theta + [W_0 + w(t)] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} + \\ &+ \frac{\pi^2 F_i}{L^2} (p_0 + p_a \sin \Omega t) [W_0 + w(t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из системы уравнений (15) можно отметить очевидное взаимодействие между вращательными и изгибными колебаниями трубопровода.

При $\theta(t) \equiv 0$, $w(t) \equiv 0$, $p_a \equiv 0$ из второго уравнения (15) следует формула для определения статической составляющей W_0 прогиба трубопровода:

$$W_0 = \frac{4mg_1L}{\pi^3(\pi^2 EJ / L^2 - p_0 F_i)}. \quad (16)$$

Из формулы (16) видно, что величина W_0 статической составляющей прогиба неограниченно возрастает при значении среднего давления

$$p'_0 = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 F_i}. \quad (17)$$

Значение давления (17) может быть названо критическим [1].

С учетом функции (14) горизонтальные перемещения u_0 , u и скорость скользящей опоры запишутся

$$u_0 = -\frac{\pi^2}{8L}[W_0 + w(t)]^2, u = -\frac{\pi^2}{4L}[W_0 + w(t)]^2, \quad \frac{du}{dt} = u = -\frac{\pi^2}{2L}[W_0 + w(t)]w, \quad (18)$$

где $w = dw/dt$ – скорость средней точки пролета трубопровода.

Так же, как и в [20], линеаризация уравнений (15) относительно переменных θ , w и их производных в случае малости амплитуды p_a переменной составляющей внутреннего давления приводит к независимым друг от друга дифференциальным уравнениям вращательных и изгибных колебаний трубы. Имеем

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2n_1 \frac{dw}{dt} + k_1^2 w = \frac{\pi^2 p_a F_i W_0}{(m + m')L} \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2n_2 \frac{d\theta}{dt} + k_2^2 \theta = 0. \quad (19)$$

Здесь $n = \mu(R_i + h)L$, $n_1 = n / (m + m')$,

$k_1^2 = \pi^2(\pi^2 EJ / L^2 - p_0 F_i) / (m + m') / L$,

$n_2 = nW_0^2 / J_p'$, $J_p' = (m + m')W_0^2 + 2J_p$,

$k_2^2 = 4g_1 m / \pi / J_p'$.

Собственные частоты линейных изгибных f_1 и вращательных f_2 колебаний трубы равны:

$$f_1 = (k_1^2 - n_1^2)^{1/2} / (2\pi), \quad f_2 = (k_2^2 - n_2^2)^{1/2} / (2\pi). \quad (20)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (15) решается при следующих начальных условиях:

$\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = \omega_0$, $w = 0$, $\dot{w} = 0$ ($t=0$). (21)
Здесь $\dot{\theta} = d\theta/dt$ — угловая скорость вращения трубопровода.

Численное решение задачи Коши (15), (21) при $\theta_0 = 0$ рад и $\omega_0 = 1,0$ рад/с определялось методом Рунге-Кутты. Затем к этому решению применялись дискретное преобразование Фурье и отображение Пуанкаре [23].

Для более зримого представления трубопровода в пространстве представляет также интерес построение траектории средней точки пролета [22]. С этой целью определяются координаты x , y и z этой точки. Из рисунка 1 видно, что

$$x = \frac{L}{2} - \frac{\pi^2}{8L}[W_0 + w(t)]^2, y = -[W_0 + w(t)]\sin\theta, \quad z = [W_0 + w(t)]\cos\theta. \quad (22)$$

Далее обсуждается влияние окружающей среды, изменения величин среднего давления p_0 и частоты $f = \Omega/(2\pi)$ переменной составляющей внутреннего давления в трубопроводе на его изгибно-вращательные колебания.

Вычисления были проведены для стальных труб 530×12 и 530×8 (ГОСТ 20295-85) длиной $L = 25$ м. В первом случае внутренний радиус R_i и толщина h стенки трубы соответственно составляют 0,253 м и 0,012 м, а во втором — 0,257 м и 0,008 м. Модуль Юнга и плотность материала: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\rho_p = 7800$ кг/м³. Приближенные значения внутреннего критического давления p'_0 , которое вычисляется по формуле (17), для труб с указанными выше толщинами стенок равны соответственно 10,3 МПа и 6,08 МПа. Для трубы с толщиной стенки $h = 0,012$ м рассматривались два варианта заполнения транспортируемым продуктом: жидкостью и сжатым газом с плотностями $\rho_0 = 800$ кг/м³ и $\rho_0 = 51,7$ кг/м³ соответственно. А для трубы с толщиной стенки $h = 0,008$ м рассматривался только один вариант заполнения: жидкостью с плотностью $\rho_0 = 800$ кг/м³. Суммарная масса m трубы и транспортируемого продукта в первом варианте составляла 7830 кг ($h = 0,012$ м) и 6708 кг ($h = 0,008$ м), а во втором — 4068 кг. В качестве окружающих трубопровод сред рассматривались водная и воздушная среды с плотностями $\rho_c = 800$ кг/м³ и $\rho_c = 1,25$ кг/м³, с динамическими коэффициентами вязкости $\mu_0 = 1,0056 \cdot 10^{-3}$ Па·с и $\mu_0 = 1,808 \cdot 10^{-5}$ Па·с соответственно. Значение отношения радиуса возмущений, вызываемых движением цилиндра, к его внешнему радиусу, в формуле (5): $k = 2$. Гравитационное ускорение $g = 9,81$ м/с². Параметры переменной составляющей вну-

тренного давления в трубе: $p_a = 0,15$ МПа, $\varphi_0 = 0$ рад. Среднее давление в трубе с толщиной стенки 0,012 м принимало одно значение: $p_0 = 7,08$ МПа, а в трубе с толщиной стенки 0,008 м — три значения: $p_0 = 1,08$; 3,08 и 5,08 МПа.

Частоты f переменной составляющей внутреннего давления в трубе принимали восемь значений: 0,460; 0,616; 0,726; 0,756; 0,909; 1,29; 2,00 и 2,50 Гц. Максимальное время t_{max} , в течение которого изучались движения трубопровода, составляло 100 с. Результаты вычислений представлены в виде графических зависимостей динамической составляющей прогиба w средней точки пролета и угла θ поворота трубы в отрезке времени t от 40 до 60 с, фазовых траекторий и зависимостей модулей Фурье — спектров $|F_1^*|$ изгибных, $|F_2^*|$ вращательных и $|F_3^*|$ колебаний скользящей опоры от частоты f и отображений Пуанкаре. Переменные на графиках измеряются: время t — в секундах; координаты x , y , z средней точки пролета; суммарный прогиб $W_s = W_0 + w$; его статическая W_0 и динамическая w составляющие средней точки пролета — в метрах; линейные скорости w , u — в метрах в секунду; угол θ — в радианах; угловая скорость, $\dot{\theta}$ — в радианах в секунду; частота f — в Герцах. Фурье-спектры $|F_1^*|$, $|F_2^*|$ — в метрах на секунду и $|F_3^*|$ — в радианах на секунду. Отметим, что при построении фазовых траекторий изгибных колебаний вместо динамической составляющей w прогиба по вертикальной оси откладывался суммарный W_s прогиб средней точки пролета трубопровода.

Для исключения начального участка процесса колебаний трубопровода обработка фазовых точек при построении отображений Пуанкаре производилась с момента времени $t_0 = 20$ с. Период обработки фазовых точек: $\tau = 1/f$. Числовые значения этого периода для восьми указанных выше частот переменной части давления соответственно равны: $\tau = 2,17$; 1,62; 1,38; 1,32; 1,10; 0,775; 0,50 и 0,40 с. В пределах рассматриваемого отрезка времени число точек, содержащихся в отображении Пуанкаре, соответственно равно 37, 49, 58, 61, 73, 103, 160 и 200.

Результаты вычислений приведены в виде графиков на рисунках 2–12.

На всех рисунках фрагменты сверху дают зависимости прогиба, угла поворота или пере-

мещения скользящей опоры трубы от времени, ниже — соответствующие фазовые траектории, траектории средней точки пролета, спектры частот и отображения Пуанкаре.

Зависимость колебаний от частоты f возбуждения и окружающей среды иллюстрируется рисунками 2–6. Слева направо на рисунках расположены столбцы графиков для трех значений частоты f переменной составляющей внутреннего давления, которые указаны сверху.

Из рисунков 2–6 видно, что в случаях колебаний трубопровода в обеих средах при всех принятых значениях частот внутреннего давления изгибные, вращательные и горизонтальные перемещения скользящей опоры трубы являются непериодическими. Можно видеть также, что при частотах $f = 0,616$ Гц, $f = 0,756$ Гц (воздушная среда), $f = 0,460$ Гц (водная среда) и $f = 2,00$ Гц (обе среды) амплитуды указанных колебаний значительно меньше тех же амплитуд, чем при частотах $f = 0,909$ Гц, $f = 1,29$ Гц (воздушная среда) и $f = 0,726$ Гц (водная среда). Кроме того, если при первых четырех значениях частот области, занятые фазовыми траекториями, проекциями траектории средней точки пролета на вертикальную плоскость yz , и отображениями Пуанкаре локализованы около положения статического равновесия, то при последних трех значениях частот эти области многократно расширяются.

При этом, как это видно из рисунка 5, координата z средней точки пролета может принимать также отрицательные значения. Поэтому частоты $f = 0,909$; 1,29 и 0,726 Гц можно назвать околорезонансными частотами изгибных колебаний трубы. Из рисунков можно также видеть, что при нерезонансных режимах преобразование Фурье выделяет изгибные колебания трубы и колебательные движения ее скользящей опоры с тремя частотами. Одна из них совпадает с частотой колебаний давления, другая — с первой собственной частотой изгибных колебаний, третья — с удвоенной первой собственной частотой вращательных колебаний трубопровода. Появление на спектрах частот гармоник с удвоенной частотой объясняется взаимодействием изгибных и вращательных колебаний трубопровода. За один цикл последних приходится два цикла изгибных колебаний. Причем вращательные колебания в большей степени влияют

на изгибные колебания трубопровода, чем последние на вращательные колебания. Это обусловлено тем, что центробежные силы инерции, действующие на трубопровод, изменя-

ются прямо пропорционально второй степени угловой скорости вращательных движений, тогда как моменты сил сопротивления — первой степени суммарного прогиба.

Рисунок 2. Зависимости динамической составляющей прогиба w , м, от времени t , с, фазовые траектории, W_s , м, w , м/с, проекция траектории средней точки пролета с координатами x , y , z , м, на вертикальную плоскость y , z , спектры частот, $|F_1^*|$, м/с, и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы с жидкостью в воздушной среде при среднем давлении $p_0 = 7,08$ МПа, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях частот f переменного внутреннего давления

Рисунок 3. Зависимости угла поворота трубы θ , рад, от времени t , с, фазовые траектории, θ , рад/с, спектры частот $|F_2^*|$, рад/с, и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы с жидкостью в воздушной среде при среднем давлении $p_0 = 7,08 \text{ МПа}$, амплитуде $p_a = 0,15 \text{ МПа}$, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях частот f переменного внутреннего давления

Рисунок 4. Зависимости перемещения u , м, от времени t , с, фазовые траектории, w , м/с, спектры частот $|F_3^*|$, м·с, и отображения Пуанкаре горизонтальных колебаний скользящей опоры трубы с жидкостью в воздушной среде при среднем давлении $p_0 = 7,08 \text{ МПа}$, амплитуде $p_a = 0,15 \text{ МПа}$, начальной фазе $\varphi_0 = 0 \text{ рад}$ и разных значениях частот f переменного внутреннего давления

Рисунок 5. Зависимости динамической составляющей прогиба w , м, от времени t , с, фазовые траектории, W_s , м, $\dot{w}$, м/с, проекция траектории средней точки пролета с координатами x , y , z , м, на вертикальную плоскость yz , спектры частот, $|F_1^*|$, м·с, и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы с газом в воздушной среде при среднем давлении $p_0 = 7,08$ МПа, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях частот f переменного внутреннего давления

Рисунок 6. Зависимости динамической составляющей прогиба w , м, от времени t , с, фазовые траектории, W_s , м, м/с, проекция траектории средней точки пролета с координатами x , y , z , м, на вертикальную плоскость y z , спектры частот, $|F_1|$, м/с, и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы с газом в водной среде при среднем давлении $p_0 = 7,08$ МПа, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях частот f переменного внутреннего давления

Рисунок 7. Зависимости динамической составляющей прогиба w , м, от времени t , с, фазовые траектории, W_s , м, w , м/с, проекция траектории средней точки пролета с координатами x , y , z , м, на вертикальную плоскость y z , спектры частот, $|F_1^*|$, м/с, и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в воздушной среде при частоте $f = 2,5$ Гц, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях p_0 средней части внутреннего давления

Рисунок 8. Зависимости угла поворота трубы θ , рад, от времени t , с, фазовые траектории θ , рад/с, спектры частот $|F_2^*|$, рад · с, и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы с жидкостью в воздушной среде при частоте $f = 2,5$ Гц, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях средней части p_0 внутреннего давления

Рисунок 9. Зависимости перемещения u , м, от времени t , с, фазовые траектории, w , м/с, спектры частот $|F_3^*|$, м·с, и отображения Пуанкаре горизонтальных колебаний скользящей опоры трубы с жидкостью в воздушной среде при частоте $f = 2,5$ Гц, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях средней части p_0 внутреннего давления

Рисунок 10. Зависимости динамической составляющей прогиба w , м, от времени t , с, фазовые траектории, W_s , м, w , м/с, проекция траектории средней точки пролета с координатами x , y , z , м, на вертикальную плоскость yz , спектры частот, $|F_1^{(w)}|$, м/с, и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы с жидкостью в водной среде при частоте $f = 2,5$ Гц, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях средней части p_0 внутреннего давления

Рисунок 11. Зависимости угла поворота трубы θ , рад, от времени t , с, фазовые траектории, θ , рад/с, спектры частот $|F_2^*|$, рад·с, и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в водной среде при частоте $f = 2,5$ Гц, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях средней части p_0 внутреннего давления

Рисунок 12. Зависимости перемещения u , м, от времени t , с, фазовые траектории, u , м/с, спектры частот $|F_3^*|$, м·с, и отображения Пуанкаре горизонтальных колебаний скользящей опоры трубы в водной среде при частоте $f = 2,5$ Гц, амплитуде $p_a = 0,15$ МПа, начальной фазе $\varphi_0 = 0$ рад и разных значениях средней части p_0 внутреннего давления

Кроме того, при значении частоты переменной составляющей давления, близкой оккореzonансному значению частоты изгибных колебаний, происходит значительное увеличение амплитуд изгибных, вращательных колебаний и колебательных движений скользящей опоры трубопровода. А спектры частот этих колебаний становятся сплошными.

Из результатов вычислений следует, что графические зависимости, полученные для случаев колебаний трубопровода с газом в воздушной среде или колебаний трубопровода с жидкостью в водной среде, имеют общие закономерности с графическими зависимостями, приведенными на рисунках 2–4 для случая колебаний трубы с жидкостью в воздушной среде. Поэтому на рисунках 5 и 6 представлены лишь графики, относящиеся к изгибным колебаниям трубы в указанных первых двух случаях.

Влияние величины среднего давления p_0 на колебательные движения трубы с толщиной стенки 0,008 м в воздушной среде представлено на рисунках 7–9, а в водной среде — на рисунках 10–12. На них разные столбцы относятся к разным давлениям p_0 , которые также указаны сверху. В данном случае расчеты проводились при частоте $f = 2,50$ Гц переменной составляющей внутреннего давления в трубопроводе. При принятых параметрах приближенные числовые значения статической составляющей прогиба W_0 , собственных частот изгибных f_1 и вращательных f_2 колебаний трубы, определяемых формулами (16) и (20), сведены в таблицы 1 и 2.

Из рисунков 7, 9, 10 и 12 видно, что при принятых значениях среднего давления изгиб-

ные и горизонтальные колебания скользящей опоры трубы в отрезке времени от 40 до 60 с имеют вид биений. Видно также, что с увеличением среднего давления в трубопроводе происходит заметное увеличение амплитуд его изгибных колебаний и горизонтальных колебаний скользящей опоры. Это имеет место при колебаниях трубопровода в воздушной и водной средах. Данное обстоятельство объясняется увеличением произведения кривизны осевой линии и внутреннего давления, что приводит к уменьшению эффективной жесткости и к увеличению статического прогиба трубопровода [22]. Кроме того, из рисунков 8 и 11 видно, что с увеличением среднего давления амплитуда и частота вращательных колебаний трубы при ее движениях в воздушной среде изменяются незначительно, а при движениях трубы в водной среде они уменьшаются. Уменьшение амплитуды и частоты вращательных колебаний трубы в водной среде обусловлено тем, что с увеличением среднего давления увеличивается статическая составляющая прогиба, а это, в свою очередь, приводит к увеличению моментов силы вязкого сопротивления и силы, связанной ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде. При этом фазовые траектории вращательных колебаний имеют вид кольца определенной толщины. С увеличением среднего давления в трубе происходит также расширение и изменение формы области, занятой отображением Пуанкаре. Отметим также, что на формирование конфигураций и размеров областей отображения Пуанкаре значительное влияние оказывают как нелинейности в дифференциальных урав-

Таблица 1. Труба в воздушной среде

Среднее давление p_0 , МПа; транспортируемый продукт	Статический прогиб W_0 , м	Собственная частота f_1 , Гц	Собственная частота f_2 , Гц
1,08; жидкость	0,178	1,330	0,820
3,08; жидкость	0,274	1,070	0,825
5,08; жидкость	0,593	0,567	0,427
7,08; жидкость	0,382	0,909	0,756
7,08; газ	0,199	1,290	0,616

Таблица 2. Труба в водной среде

Среднее давление p_0 , МПа; транспортируемый продукт	Статический прогиб W_0 , м	Собственная частота f_1 , Гц	Собственная частота f_2 , Гц
1,08; жидкость	0,0612	1,030	0,338
3,08; жидкость	0,0940	0,834	0,392
5,08; жидкость	0,2030	0,567	0,427
7,08; жидкость	0,1670	0,726	0,460

нениях и изменения параметров переменного внутреннего давления, так и изменения значений моментов времени τ_0 и τ_{max} . Из спектров частот на рисунках 8 и 11 можно видеть, что при всех принятых значениях среднего давления изгибные и горизонтальные колебания скользящей опоры трубопровода также складываются из трех гармонических колебаний с различными амплитудами и частотами.

Рассмотренная модель пространственных колебаний трубопровода со скользящей опорой является наиболее простой. В ней исключены, например, начальные пространственные искривления оси, поперечные и продольные деформации и сопротивление вращению трубопровода в опорах. Учет даже одного из этих факторов резко усложняет задачу, так как тогда необходимо рассматривать пространственный изгиб трубопровода, при котором его ось не будет лежать в одной плоскости, и деформацию кручения вокруг этой оси. Тем не менее, рассмотренная простейшая модель позволяет выявить важные свойства динамики данной механической системы [22].

Полученные результаты вычислений и их анализ позволяют сделать следующие **выводы**.

1. При всех принятых значениях параметров изгибные, вращательные и горизонтальные перемещения скользящей опоры трубы являются непериодическими.
2. В нерезонансных режимах изгибные и горизонтальные колебания скользящей

опоры трубопровода имеют вид биений и складываются из гармонических колебаний с тремя частотами: с частотой переменного внутреннего давления, с частотой свободных изгибных колебаний и с удвоенной частотой свободных вращательных колебаний трубопровода.

3. Вращательные колебания в большей степени влияют на изгибные колебания трубопровода, чем последние на вращательные колебания.

4. В околорезонансных режимах изгибных колебаний трубы происходит значительное увеличение амплитуд изгибных и вращательных колебаний и колебательных движений скользящей опоры трубопровода.

5. Увеличение среднего давления в трубопроводе приводит к заметному увеличению амплитуд его изгибных колебаний и горизонтальных колебаний скользящей опоры. Это относится к случаям колебаний трубы в обеих средах. При этом амплитуды и частоты вращательных колебаний трубопровода в водной среде значительно меньше этих же амплитуд и частот, чем при его колебаниях в воздушной среде.

6. Рассмотренная простейшая модель пространственных колебаний трубопровода со скользящей опорой позволяет выявить важные свойства динамики данной механической системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-41-020400 р_а).

СПИСОК ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
2. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
3. Chen S.S. Forced Vibration of a Cantilevered Tube Conveying Fluid // J. of the Acoustical Society of America. 1970. V. 48. P. 773–775.
4. Ibrahim R.A. Mechanics of Pipes Conveying Fluids // ASME J. of Pressure Vessel Technology. 2010. V. 132. P. 1–32.
5. Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Изд-во МГТУ, 1996. 258 с.
6. Ганиев Р.Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. 592 с.
7. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Fizmatlit, 1998. 208 p.
8. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and Forced Response of a Cantilevered Pipe: the Influence of Internal Pressure and Nozzle Discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
9. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and postbuckling Behavior of a Pipe Subjected to Internal Pressure. J. of Appl. Mech. 1995. V. 62. No. 3. P. 595–600.
10. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // Доклады академии наук. 2016. Т. 470. № 2. С. 162–165.
11. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 1. С. 181–192.
12. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Коровина Л.И. Поперечные колебания трубопроводов с равномерно движущейся жидкостью // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 6. С. 781–784.
13. Zhang Y.L., Chen L.Q. Internal Resonance of Pipes Conveying Fluid in the Supercritical Regime // J. Nonlinear Dynamics. 2012. V. 67. P. 1505–1514.
14. Chen L.Q., Zhang Y.L., Zhang G.C., Ding H. Evolution of the Double-Jumping in Pipes Conveying Fluid

Flowing at the Supercritical Speed // *International J. of Non-Linear Mechanics*. 2014. V. 58. P. 11–21.

15. McDonald R.J., Namchivaya N.S. Pipes Conveying Pulsating Fluid Near a 0:1 Resonance: Global Bifurcations // *J. of Fluids and Structures*. 2005. V. 21. P. 665–687.

16. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear Dynamics of a Pipe Conveying Pulsating Fluid with Parametric and Internal Resonances // *J. Nonlinear Dynamics*. 2007. V. 49. P. 9–30.

17. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear Dynamics of a Pipe Conveying Pulsating Fluid with Combination, Principal Parametric And Internal Resonances // *J. of Sound and Vibration*. 2008. V. 309. P. 375–406.

18. Modarres-Sadeghi Y., Païdoussis M.P. Nonlinear Dynamics of Extensible Fluid Conveying Pipes, Supported at Both Ends // *J. of Fluids and Structures*. 2009. V. 25. P. 535–543.

19. Alasty A., Shabani R. Chaotic Motions and Fractal Basin Boundaries in Spring Pendulum System // *J. Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2006. V. 7. P. 81–95.

20. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2016. № 6. С. 3–13.

21. Шакирьянов М.М. Пространственные хаотические колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2016. № 4. С. 35–47.

22. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные неперидические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2017. № 2. С. 3–12.

23. Chen L.Q., Zhang G.C., Ding H. Internal Resonance in Forced Vibration of Coupled Cantilevers Subjected to Magnetic Interaction // *J. of Sound and Vibration*. 2015. V. 354. P. 196–218.

24. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.

25. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.

REFERENCES

1. Il'gamov M.A. *Kolebaniya uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' i gaz* [Vibrations of Elastic Shells Containing Liquid and Gas]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 180 p. [in Russian].

2. Svetlitskii V.A. *Mekhanika truboprovodov i shlangov* [Mechanics of Pipelines and Hoses]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 280 p. [in Russian].

3. Chen S.S. Forced Vibration of a Cantilevered Tube Conveying Fluid. *J. of the Acoustical Society of America*, 1970, Vol. 48, pp. 773–775.

4. Ibrahim R.A. Mechanics of Pipes Conveying Fluids. *ASME J. of Pressure Vessel Technology*, 2010, Vol. 132, pp. 1–32.

5. Ganiev R.F., Nizamov Kh.N., Derbukov E.I. *Volnovaya stabilizatsiya i preduprezhdenie avarii v truboprovodakh* [Wave Stabilization and Accident Prevention in Pipelines]. Moscow, MGTU Publ., 1996. 258 p. [in Russian].

6. Ganiev R.F. *Nelineinye rezonansy i katastrofy. Nadezhnost', bezopasnost' i besshumnost'* [Nonlinear Resonances and Catastrophes. Reliability, Safety and Quietness]. Moscow, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2013. 592 p. [in Russian].

7. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. Moscow, Fizmatlit Publ., 1998. 208 p.

8. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and Forced Response of a Cantilevered Pipe: the Influence of Internal Pressure and Nozzle Discharge. *J. of Fluids and Structures*, 1994, Vol. 8, pp. 139–156. [in Russian].

9. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and Post-Buckling Behavior of a Pipe Subjected to Internal Pressure. *J. of Appl. Mech.*, 1995, Vol. 62, No. 3, pp. 595–600. [in Russian].

10. Ganiev R.F., Il'gamov M.A. Uprugaya reaktsiya truboprovoda na vnutrennee udarnoe davlenie [Elastic Reaction of Pipeline to Internal Shock Pressure]. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2016, Vol. 470, No. 2, pp. 162–165. [in Russian].

11. Il'gamov M.A., Mishin V.N. Poperechnye kolebaniya trub pod deistviem begushchikh voln v zhidkosti [Transverse Oscillations of a Tube under the Action of Traveling Waves in a Liquid]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela — Izv. RAS. Mechanics of Solids*, 1997, No. 1, pp. 181–192. [in Russian].

12. Nesterov S.V., Akulenko L.D., Korovina L.I. Poperechnye kolebaniya truboprovodov s ravnomerno dvizhu-shcheisya zhidkost'yu [Transverse Oscillations of a Pipeline with Uniformly Moving Fluid]. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2009, Vol. 427, No. 6, pp. 781–784. [in Russian].

13. Zhang Y.L., Chen L.Q. Internal Resonance of Pipes Conveying Fluid in the Supercritical Regime. *J. Nonlinear Dynamics*, 2012, Vol. 67, pp. 1505–1514.

14. Chen L.Q., Zhang Y.L., Zhang G.C., Ding H. Evolution of the Double-Jumping in Pipes Conveying Fluid Flowing at the Supercritical Speed. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 2014, Vol. 58, pp. 11–21.

15. McDonald R.J., Namchivaya N.S. Pipes Conveying Pulsating Fluid Near a 0:1 Resonance: Global Bifurcations. *J. of Fluids and Structures*, 2005, Vol. 21, pp. 665–687.

16. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear Dynamics of a Pipe Conveying Pulsating Fluid with Parametric and Internal Resonances. *J. Nonlinear Dynamics*, 2007, No. 49, pp. 9–30.

17. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear Dynamics of a Pipe Conveying Pulsating Fluid with Combination, Principal Parametric and Internal Resonances. *J. of Sound and Vibration*, 2008, Vol. 309, pp. 375–406.

18. Modarres-Sadeghi Y., Païdoussis M.P. Nonlinear Dynamics of Extensible Fluid Conveying Pipes, Supported at Both Ends. *J. of Fluids and Structures*, 2009, Vol. 25, pp. 535–543.

19. Alasty A., Shabani R. Chaotic Motions and Fractal Basin Boundaries in Spring Pendulum System. *J. Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2006, Vol. 7, pp. 81–95.

20. Ganiev R.F., Il'gamov M.A., Khakimov A.G., Shakir'yanov M.M. Prostranstvennye kolebaniya truboprovoda v sploshnoi srede pod deistviem peremennogo vnutrennego davleniya [Spatial Vibrations of a Pipeline in a Continuous Medium under the Action of Variable Internal Pressure]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2016, No. 6, pp. 3–13. [in Russian].

21. Shakir'yanov M.M. Prostranstvennye khaoticheskie kolebaniya truboprovoda v sploshnoi srede pod deistviem peremennogo vnutrennego davleniya [Spatial Chaotic Vibrations of a Pipeline in the Continuous Medium under the Impact of Alternating Internal Pressure]. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN — Izvestiya of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, No. 4, pp. 35–47. [in Russian].

22. Ganiev R.F., Il'gamov M.A., Khakimov A.G., Shakir'yanov M.M. Prostranstvennye neperiodicheskie kolebaniya truboprovoda pod deistviem peremennogo vnutrennego davleniya [Spatial Aperiodic Vibrations of the Pipelines under Transient Internal Pressure]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, No. 2, pp. 3–12. [in Russian].

23. Chen L.Q., Zhang G.C., Ding H. Internal Resonance in Forced Vibration of Coupled Cantilevers Subjected to Magnetic Interaction. *J. of Sound and Vibration*, 2015, Vol. 354, pp. 196–218.

24. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoi neszimaemoi zhidkosti* [Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955. 521 p. [in Russian].

25. Mushtari Kh.M., Galimov K.Z. *Nelineinaya teoriya uprugikh obolochek* [Nonlinear Theory of Elastic Shells]. Kazan, Tatknigoizdat Publ., 1957. 431 p. [in Russian].

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ABOUT THE AUTHORS

Хакимов Аким Гайфуллинович, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики твердого тела, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, г. Уфа, Российская Федерация

Akim G. Khakimov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Leading Researcher, Laboratory of Solid Mechanics, R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

e-mail: hakimov@anrb.ru

Шакирьянов Марат Масгутьянович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики твердого тела, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, г. Уфа, Российская Федерация

Marat M. Shakiryanov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Senior Researcher, Laboratory of Solid Mechanics, R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

e-mail: shakmar9@mail.ru