ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В КОМПОЗИЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ С V-ОБРАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ С РАЗЛИЧНЫМИ МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ

THEORETICAL ANALYSIS OF THE FEATURES OF THE STRESS STATE IN A COMPOSITE MATERIAL WITH A V-SHAPED INTERFACE BETWEEN COMPONENTS WITH DIFFERENT ELASTIC MODULES

К. М. Гумеров

Kabir M. Gumerov

НТЦ ООО «НИИ Транснефть»,
г. Уфа, Российская Федерация

Scientific and Technical Center,
Transneft R&D, LLC,
Ufa, Russian Federation

А. А. Распопов

Andrei A. Raspopov

ООО «НИИ Транснефть»,
г. Москва, Российская Федерация

Transneft R&D, LLC,
Moscow, Russian Federation

Л. В. Виноградов

Leonid V. Vinogradov

Институт металлургии
и материаловедения
им. А.А. Байкова РАН,
г. Москва, Российская Федерация

Institute of Metallurgy and Materials
Science named for A.A. Baikov,
Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation

Методом комплексных потенциалов с применением уравнений Колосова-Мусхелишвили проведён теоретический анализ напряжённого состояния в вершине V-образной границы, разделяющей два однородных материала с отличающимися модулями нормальной упругости. Расчёт показал, что у вершины угла напряжённое состояние приобретает сингулярный характер, описываемый установленной зависимостью, где параметр особенности напряжённого состояния зависит от соотношения модулей упругости компонентов.

A theoretical analysis of the stressed state at the vertex of the V-shaped boundary separating two homogeneous materials with differing modules of normal elasticity was carried out using the complex potential method with the Kolosov-Muskhelishvili equations. The calculation showed that at the top of the angle the stressed state acquires a singular character, described by a defined dependence, where the parameter of the singularity of the stressed state depends on the ratio of elasticity modulus of the components.

1. Введение

В последние годы в нефтегазовой отрасли расширяется применение новых марок высокопрочных сталей и неметаллических материалов, осуществляется внедрение новых технологий монтажа и ремонта трубопроводов и оборудования с применением композитов. Это приводит к необходимости обязательного учета новых факторов при определении прочности, долговечности, надёжности элементов конструкций. Одним из таких факторов является механическая неоднородность (гетерогенность) материалов и соединений на уровне микро- и макроструктур.

Отличительной чертой гетерогенной системы с ярко выраженной структурной неоднородностью (дисперсионно-упрочнённые и волокнисто-армированные композиты) является наличие чётко выраженной границы раздела между разнородными компонентами, с различными, порой контрастно отличающимися, физико-механическими характеристиками. При этом существенное влияние на характер напряжённого состояния в композите оказывает граница раздела, вдоль которой осуществляется взаимодействие между компонентами [1]. В первую очередь, через границу раздела передаётся нагрузка от одного

Ключевые слова

композиционный материал, граница раздела, комплексные потенциалы, сингулярность напряжений

Key words

composite material, interface, complex potentials, stress singularity

компонента к другому, что может сопровождаться возникновением аномальных зон, существенно влияющих на прочностные характеристики материала в целом. Как правило, внимание исследователей при изучении указанной проблемы сосредоточено на роли физико-химических процессов, протекающих на поверхностях раздела, оценивая их влияние на механические свойства и характеристики разрушения композита. Детальное же исследование зависимости этих характеристик, в том числе от конфигурации границы раздела, оставалось на втором плане. Следует отметить, что любой неоднородный многофазный материал представляет собой механический континуум, в интегральные характеристики которого каждая из фаз вносит определенный вклад через реологические взаимодействия на межфазных поверхностях раздела, возникающие из-за различия упругих и пластических характеристик компонентов. При этом заметное влияние приобретает геометрический фактор. Если в гетерогенных системах (например в перлитных сталях) с ориентированными случайным образом поверхностями раздела, где способная к упрочнению фаза представлена в виде частиц произвольной формы и реологические взаимодействия на поверхностях раздела континуума не имеют направленного характера, то в композиционных материалах с волокнистым упрочнением континуум, напротив, имеет ориентированный,

чётко направленный характер. Это определяет значимость геометрических параметров подобных материалов для оценки их напряженного состояния при эксплуатационных нагрузках: в зависимости от конфигурации границы и способа нагружения композита в приграничных областях могут возникать опасные зоны с резким повышением концентрации напряжений. Так, в однонаправленном волокнистом композиционном материале с линейной границей раздела распределение напряжений и деформаций в поперечном сечении композита на некотором удалении от точки приложения осевого однородного усилия фактически становится равномерным. В то же время в дискретно армированных композитах, где граница раздела на торце волокна в плане имеет вид двугранного ортогонального угла, наблюдается существенное возмущение напряжённого состояния [2].

В настоящей работе представлены результаты теоретического исследования напряжённого состояния у вершины V-образной границы раздела между двумя разномодульными компонентами.

2. Постановка задачи и её решение

Расчёт проведён для плоской модели двухфазного континуума, где граница раздела между разномодульными компонентами образует в плане двугранный угол V-образной формы (рисунок 1).

Рисунок 1. Расчётная модель континуума с V-образной границей раздела между разномодульными компонентами (а) и система координат (б)

Данная задача относится к классу задач с сингулярным характером распределения напряжений [3, 4], когда при определенных условиях в окрестности особой точки напряжения распределяются по закону $\sigma = \frac{K}{r^\lambda}$, где r — расстояние от особой точки; K — коэффициент, зависящий от вида нагрузки; λ — параметр особенности напряжённого состояния, зави-

сящий от конфигурации объекта исследования. При этом для положительных значений λ напряжения в самой точке в момент приложения нагрузки стремятся к бесконечности. Примерами таких точек являются вершины трещин, угловые точки перехода от сварного шва к основному металлу, краевые точки стыков в соединениях разнородных материалов [5–9].

Для решения данной задачи был применен метод комплексных потенциалов (МКП) с применением уравнений Колосова-Мусхелишвили [3–10]. В случае решения плоской задачи все смещения и напряжения можно представить через функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ (комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили) и $f(z)$ — функцию комплексной переменной $z = x + iy$ в виде следующих выражений:

$$\sigma_t + \sigma_n = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \quad (1.1)$$

$$\sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{tn} = 2I^{2i\alpha}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \quad (1.2)$$

$$2\mu(u + iv) = \chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}; \quad (1.3)$$

$$w = \operatorname{Re}f(z); \quad \tau_{tz} + i\tau_{nz} = \mu\overline{f'(z)}I^{-i\alpha}; \quad (1.4)$$

$$[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{AB}^B = i \int_{AB} (X_n + iY_n) \cdot ds; \quad (1.5)$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z); \quad \Psi(z) = \psi'(z); \quad (1.6)$$

$$\chi = 3 - 4\nu \text{ при } \varepsilon_z = 0 \text{ (случай плоской деформации);} \quad (1.7)$$

$$\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu) \text{ при } \sigma_z = 0 \text{ (плосконапряжённое состояние),} \quad (1.8)$$

где $z = x + iy = r \exp(i\theta)$ — комплексная координата точки (x, y) ;

(t, n) — произвольная декартова система координат в плоскости (x, y) ;

α — угол между осями x и t , направление отсчета от оси x к оси t ;

$\sigma_t, \sigma_n, \sigma_z, \sigma_{tn}, \sigma_{tz}, \sigma_{nz}$ — компоненты тензора напряжений;

u, v, w — составляющие вектора смещения по осям x, y, z соответственно;

μ, ν — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

Решение этих уравнений даёт описание сложнопластического состояния, представляющего диспозицию двух независимых полей напряжений, одно из которых соответствует сложному (антиплоскому) сдвигу:

$$w \neq 0; \quad \tau_{tz} \neq 0; \quad \tau_{nz} \neq 0; \quad u = v = 0;$$

$$\sigma_n = \sigma_t = \tau_{tn} = \sigma_z = 0,$$

а другое — плоской деформации:

$$u \neq 0; \quad v \neq 0; \quad \sigma_n \neq 0; \quad \sigma_t \neq 0; \quad \tau_{tn} \neq 0;$$

$$dw/dz = 0; \quad \sigma_z \neq 0; \quad \tau_{tz} = \tau_{nz} = 0$$

или плоскому напряжённому состоянию:

$$u \neq 0; \quad v \neq 0; \quad \sigma_n \neq 0; \quad \sigma_t \neq 0;$$

$$\tau_{tn} \neq 0; \quad dw/dz = 0; \quad \sigma_z = \tau_{tz} = \tau_{nz} = 0.$$

Если подставить $\alpha = \theta$ в формулы (1.1) и (1.2) и сложить их, то получаем следующее выражение для напряжений σ_θ и $\tau_{r\theta}$:

$$\sigma_\theta + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + I^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \quad (z = rI^{i\theta}). \quad (2)$$

Если принять во внимание, что в системе полярных координат материал 1 занимает область $-\beta < \theta < +\beta$, а материал 2 область ω (рис. 1), то функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ должны отвечать следующим условиям:

а) на границах $\theta = -\beta$ и $\theta = +\beta$ нормальные и касательные напряжения $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ с одной и другой сторон должны быть равны друг другу;

б) если функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ являются решением, удовлетворяющим данным граничным условиям, то функции $\Phi(C_1 z)$ и $\Psi(C_1 z)$, где C_1 — произвольное действительное число, также должны быть решением, удовлетворяющим этим же граничным условиям;

в) при этом функции $C_2 \Phi(z)$ и $C_2 \Psi(z)$, где C_2 — произвольное действительное число, также должны быть решением, удовлетворяющим этим же граничным условиям.

Отсюда следует, что множество искомых решений допускает группу подобия (автомодельное решение), которая выражается функциональным уравнением вида

$$C_2 f(C_1 z) = f(z). \quad (3)$$

Если допустить, что решение этого уравнения представляет собой некоторую дифференцируемую функцию, то после её подстановки в уравнение (3), получим, что C_2 будет функцией C_1 , а точнее некоторых постоянных, входящих в решение. Если подставить функцию $C_2 = C_2(C_1)$ в уравнение (3), то оно превратится в тождество, которое можно продифференцировать по параметру C_1 . В результате дифференцирования получаем

$$\frac{dC_2}{dC_1} f(C_1 z) + C_2 \frac{df(C_1 z)}{d(C_1 z)} = 0. \quad (4)$$

После соответствующих преобразований уравнения (4) получаем:

$$\frac{d \ln(f(C_1 z))}{d \ln(C_1 z)} = -\frac{d \ln C_2}{d \ln C_1}.$$

Введя обозначение $\lambda = \frac{d \ln C_2}{d \ln C_1}$, получаем

$$\frac{d \ln(f(C_1 z))}{d \ln(C_1 z)} = -\lambda. \quad (5)$$

Произведя замены переменных, из (5) получаем:

$$\frac{d \ln(f(C_1 z))}{d \ln(C_1 z)} = -\lambda; \quad \frac{d \ln(f(z^*))}{d \ln(z^*)} = -\lambda.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$f(z^*) = C_3 \cdot (z^*)^{-\lambda}, \quad (6)$$

где C_3 — произвольная постоянная.

В выражении (6) z^* является независимым аргументом, который для удобства обозначим через z . Тогда получаем

$$f(z) = C_3 \cdot z^{-\lambda}. \quad (7)$$

Отсюда можно сделать вывод, что комплексные потенциалы для данной граничной задачи, допускающей группу подобия (3), имеют вид:

$$\Phi(z) = A \cdot z^{-\lambda}; \quad \Psi(z) = B \cdot z^{-\lambda}, \quad (8)$$

где A, B, λ — некоторые постоянные, которые могут быть действительными или комплексными. В справедливости выражений (8) для данной задачи можно убедиться, подставляя их в исходные выражения (2) и проверяя граничные условия в секторе.

Далее, используя выражения (8) и исходные формулы МКП в виде (1), (2), были получены следующие аналитические выражения для напряжений и смещений:

$$\sigma_\theta = r^{-\lambda} \left\{ \begin{aligned} &[A_R(2-\lambda)\cos\lambda\theta + A_J(2-\lambda)\sin\lambda\theta] + \\ &+[B_R\cos(2-\lambda)\theta - B_J\sin(2-\lambda)\theta] \end{aligned} \right\}; \quad (9)$$

$$\sigma_r = r^{-\lambda} \left\{ \begin{aligned} &A_R(2+\lambda)\cos(\lambda\theta) + A_J(2+\lambda)\sin(\lambda\theta) - \\ &- B_R\cos(2-\lambda)\theta + B_J\sin(2-\lambda)\theta \end{aligned} \right\}; \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = r^{-\lambda} \left\{ \begin{aligned} &[A_R(2-\lambda)\cos\lambda\theta + A_J(2-\lambda)\sin\lambda\theta] + \\ &+[B_R\cos(2-\lambda)\theta - B_J\sin(2-\lambda)\theta] \end{aligned} \right\}; \quad (11)$$

$$u = r^{1-\lambda} \cdot \frac{1}{2\mu(1-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &(\chi A_R - B_R) \cdot \cos(1-\lambda)\theta + \\ &+ (-\chi A_J + B_J) \cdot \sin(1-\lambda)\theta - \\ &- A_R(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\theta - \\ &- A_J(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\theta \end{aligned} \right\}; \quad (12)$$

$$v = r^{1-\lambda} \cdot \frac{1}{2\mu(1-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &(\chi A_R + B_R) \cdot \sin(1-\lambda)\theta + \\ &+ (\chi A_J + B_J) \cdot \cos(1-\lambda)\theta - \\ &- A_R(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\theta + \\ &+ A_J(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\theta \end{aligned} \right\}; \quad (13)$$

где A_R, A_J и B_R, B_J — действительные и мнимые части коэффициентов A и B соответственно;

μ — модуль сдвига материала;

ν — коэффициент Пуассона материала;

$$\chi = 3 - 4\nu.$$

В данной расчётной модели для определения неизвестных параметров — λ, A, B используем следующие граничные условия:

на границе

$$\theta_1 = \beta \quad \left. \begin{aligned} &\sigma_{\theta(1)}(\theta_1) = \sigma_{\theta(2)}(\theta_1); \\ &\tau_{r\theta(1)}(\theta_1) = \tau_{r\theta(2)}(\theta_1); \\ &u_{(1)}(\theta_1) = u_{(2)}(\theta_1); \\ &v_{(1)}(\theta_1) = v_{(2)}(\theta_1); \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

на границе

$$\theta_2 = \beta + \omega; \quad \theta_3 = -\beta \quad \left. \begin{aligned} &\sigma_{\theta(1)}(\theta_3) = \sigma_{\theta(2)}(\theta_2); \\ &\tau_{r\theta(1)}(\theta_3) = \tau_{r\theta(2)}(\theta_2); \\ &u_{(1)}(\theta_3) = u_{(2)}(\theta_2); \\ &v_{(1)}(\theta_3) = v_{(2)}(\theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Здесь и далее индексы в скобках (1) и (2) обозначают принадлежность соответствующих величин материалам 1 и 2.

Отсюда была получена система уравнений относительно искомых параметров A, B , соответствующих каждому из материалов 1 и 2:

$$\begin{aligned} &[A_{R(1)}(2-\lambda)\cos\lambda\beta + A_{J(1)}(2-\lambda)\sin\lambda\beta] + \\ &+[B_{R(1)}\cos(2-\lambda)\beta - B_{J(1)}\sin(2-\lambda)\beta] = \\ &= [A_{R(2)}(2-\lambda)\cos\lambda\beta + A_{J(2)}(2-\lambda)\sin\lambda\beta] + \\ &+[B_{R(2)}\cos(2-\lambda)\beta - B_{J(2)}\sin(2-\lambda)\beta]; \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} &\lambda(A_{R(1)}\sin\lambda\beta - A_{J(1)}\cos\lambda\beta) + \\ &+[B_{R(1)}\sin(2-\lambda)\beta + B_{J(1)}\cos(2-\lambda)\beta] = \\ &= \lambda(A_{R(2)}\sin\lambda\beta - A_{J(2)}\cos\lambda\beta) + \\ &+[B_{R(2)}\sin(2-\lambda)\beta + B_{J(2)}\cos(2-\lambda)\beta]; \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(1)}A_{R(1)} - B_{R(1)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta + \\ &+ (-\chi_{(1)}A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(1)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta - \\ &- A_{J(1)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(2)}A_{R(2)} - B_{R(2)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta + \\ &+ (-\chi_{(2)}A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(2)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta - \\ &- A_{J(2)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(1)}A_{R(1)} + B_{R(1)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta + \\ &+ (\chi_{(1)}A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(1)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta + \\ &+ A_{J(1)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(2)}A_{R(2)} + B_{R(2)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta + \\ &+ (\chi_{(2)}A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(2)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta + \\ &+ A_{J(2)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$[A_{R(1)}(2-\lambda)\cos\lambda\beta - A_{J(1)}(2-\lambda)\sin\lambda\beta] + \\ + [B_{R(1)}\cos(2-\lambda)\beta + B_{J(1)}\sin(2-\lambda)\beta] = \\ = [A_{R(2)}(2-\lambda)\cos\lambda(\beta+\omega) + A_{J(2)}(2-\lambda)\times \\ \times \sin\lambda(\beta+\omega)] + [B_{R(2)}\cos(2-\lambda)(\beta+\omega) - \\ - B_{J(2)}\sin(2-\lambda)(\beta+\omega)]; \quad (15.5)$$

$$\lambda(-A_{R(1)}\sin\lambda\beta - A_{J(1)}\cos\lambda\beta) + \\ + [-B_{R(1)}\sin(2-\lambda)\beta + B_{J(1)}\cos(2-\lambda)\beta] = \\ = \lambda(A_{R(2)}\sin\lambda(\beta+\omega) - A_{J(2)}\times \\ \times \cos\lambda(\beta+\omega)) + [B_{R(2)}\sin(2-\lambda)\times \\ \times (\beta+\omega) + B_{J(2)}\cos(2-\lambda)(\beta+\omega)]; \quad (15.6)$$

$$\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(1)}A_{R(1)} - B_{R(1)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta - \\ &- (-\chi_{(1)}A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(1)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta + \\ &+ A_{J(1)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\} = \\ = \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(2)}A_{R(2)} - B_{R(2)}) \cdot \cos(1-\lambda)(\beta+\omega) + \\ &+ (-\chi_{(2)}A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \sin(1-\lambda)(\beta+\omega) - \\ &- A_{R(2)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)(\beta+\omega) - \\ &- A_{J(2)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)(\beta+\omega) \end{aligned} \right\}; \quad (15.7)$$

$$\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} &- (\chi_{(1)}A_{R(1)} + B_{R(1)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta + \\ &+ (\chi_{(1)}A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta + \\ &+ A_{R(1)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta + \\ &+ A_{J(1)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\} = \\ = \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(2)}A_{R(2)} + B_{R(2)}) \cdot \sin(1-\lambda)(\beta+\omega) + \\ &+ (\chi_{(2)}A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \cos(1-\lambda)(\beta+\omega) - \\ &- A_{R(2)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)(\beta+\omega) + \\ &+ A_{J(2)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)(\beta+\omega) \end{aligned} \right\}. \quad (15.8)$$

Полученная система уравнений (15) включает восемь линейных уравнений с восемью неизвестными коэффициентами — $A_{R(1)}$, $A_{J(1)}$, $B_{R(1)}$, $B_{J(1)}$, $A_{R(2)}$, $A_{J(2)}$, $B_{R(2)}$, $B_{J(2)}$ и одним неизвестным параметром λ . Последний параметр можно определить из дополнительного условия, вытекающего из свойства однородности всех уравнений. Согласно этому условию определитель системы уравнений должен быть равен нулю. В противном случае решение будет тривиальным, то есть все искомые коэффициенты, а, следовательно, и напряжения, будут равны нулю (состояние материала в отсутствии внешних нагрузок). Если определитель системы (15) обозначить через Δ , то условие существования нетривиального решения имеет вид:

$$\Delta = 0. \quad (16)$$

После раскрытия определителя Δ в явном виде было выполнено решение относительно параметра λ . Ввиду громоздкости матрицы системы уравнений (15) решение задачи было выполнено численным методом.

Анализ полученных результатов показал, что уравнение (16) может иметь несколько решений относительно параметра λ , которым соответствуют частные решения для полей напряжений. Следовательно, суммарное поле напряжений представляет собой суперпозицию этих частных решений, каждое из которых можно рассматривать в отдельности. Аналогичная картина наблюдается и в случае трещины в однородной упругой среде [3, 4]. Вклад каждого из частных решений определяется коэффициентами K_1 и K_2 , которые по аналогии с подходами, принятыми в теории хрупкого разрушения, можно именовать коэффициентами интенсивности напряжений с размерностями, зависящими от значений λ_1 и λ_2 соответственно. С учётом сказанного, выражения в формулах (9) и (11) для напряжений в вершине V-образного угла принимают следующий вид:

$$\sigma_\theta = \frac{K_1}{r^{\lambda_1}} \cdot \left\{ \begin{aligned} &[A_R(2-\lambda_1)\cos\lambda_1\theta + A_J(2-\lambda_1)\times \\ &\sin\lambda_1\theta] + [B_R\cos(2-\lambda_1)\theta - \\ &- B_J\sin(2-\lambda_1)\theta] \end{aligned} \right\} + \\ + \frac{K_2}{r^{\lambda_2}} \cdot \left\{ \begin{aligned} &[A_R(2-\lambda_2)\cos\lambda_2\theta + A_J(2-\lambda_2)\times \\ &\sin\lambda_2\theta] + [B_R\cos(2-\lambda_2)\theta - \\ &- B_J\sin(2-\lambda_2)\theta] \end{aligned} \right\}; \quad (17)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_1}{r^{\lambda_1}} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1(A_R\sin\lambda_1\theta - A_J\cos\lambda_1\theta) + \\ &+ [B_R\sin(2-\lambda_1)\theta + \\ &+ B_J\cos(2-\lambda_1)\theta] \end{aligned} \right\} + \\ + \frac{K_2}{r^{\lambda_2}} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\lambda_2(A_R\sin\lambda_2\theta - A_J\cos\lambda_2\theta) + \\ &+ [B_R\sin(2-\lambda_2)\theta + \\ &+ B_J\cos(2-\lambda_2)\theta] \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

где коэффициенты A_R , A_J , B_R , B_J принимают значения в соответствии с сочетанием параметров ω и E_1/E_2 .

Проведённый анализ показал, что значениям λ_1 во всех случаях соответствует такое напряженно-деформированное состояние, когда нормальные напряжения σ_θ и смещения u в направлении оси x симметричны относительно этой оси (биссектрисы), и поэтому на этой оси принимают максимальные или минимальные значения. Касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и смещения v в направлении, перпен-

дикулярном оси x , — асимметричны, поэтому на этой оси проходят через ноль. Соответственно, значениям λ_2 соответствует обратная картина: касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и смещения v симметричны относительно оси x , а нормальные напряжения σ_θ и смещения u асимметричны. При этом, суммарное поле напряжений в окрестности особой точки (вершины V-образного угла) представляет собой суперпозицию двух наложенных друг на друга составляющих, симметричного и асимметричного полей, характер которых определяется параметрами λ_1 и λ_2 (показателями особенности напряжённого состояния среды в сингулярной области). С другой стороны, степень напряжённости среды в этой области контролируется интенсивностями каждого из составляющих полей, определяемыми через коэффициенты K_1 и K_2 , уровень которых непосредственно связан с действующими внешними нагрузками. Расчёты показали, что уровень показателей особенностей напряжённого состояния (λ_1 и λ_2) зависит от механических свойств компонентов 1 и 2 (модулей упругости E_1 , E_2 и коэффициентов Пуассона ν_1 , ν_2) и от угла ω .

На рисунке 2 графически представлены зависимости показателей напряжённого состояния от величины V-образного угла (ω) на границе раздела компонентов 1 и 2 для некоторых случаев сочетаний их жёсткости. Видно, что изменение уровня показателей λ_1 и λ_2 существенно зависит от соотношения модулей упругости компонентов E_1/E_2 . При этом следует отметить незначительное влияние соотношений коэффициентов Пуассона.

При всех рассмотренных соотношениях упругих свойств материалов E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 только два значения λ_1 и λ_2 могут быть положительными. Следовательно, в соответствии с формулами (17) и (18) сингулярность поля напряжений вида $\sigma \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ в окрестности вершины V-образного угла (рис. 1, а) появляется только благодаря параметрам λ_1 и λ_2 .

Во всех случаях при $\omega = 180^\circ$ параметр λ принимает нулевое значение. При этом сингулярность исчезает.

3. Выводы

1. Метод комплексных потенциалов с применением уравнений Колосова-Мусхелишвили позволяет выполнить корректный теоретический анализ напряжённого состояния в вершине V-образной границы, разделяющей два однородных материала с отличающимися модулями нормальной упругости E_1 и E_2 .

2. Анализ полученных результатов показывает, что поле напряжений в окрестности вершины V-образного угла имеет сингулярный характер и представляет собой суперпозицию двух наложенных друг на друга составляющих: симметричного и асимметричного полей, вид которых определяется параметрами λ_1 и λ_2 (показателями особенности напряжённого состояния среды в сингулярной области).

3. Уровень напряжённости среды в сингулярной области контролируется интенсивностями составляющих полей, определяемыми через коэффициенты K_1 и K_2 , значения которых зависят от внешних нагрузок.

4. Значения показателей напряжённого состояния λ_1 и λ_2 зависят от угла ω , занимаемого одним из материалов, отношения модулей упругости компонентов E_1/E_2 при этом влияние коэффициентов Пуассона не является существенным.

5. Полученные результаты показывают, что для композиционных материалов следует использовать армирующие элементы с шарообразной или овальной геометрической формой с целью исключения возникновения полей напряжений сингулярного вида ($\sigma \rightarrow \infty$) и не допускать армирование остроугольными элементами.

6. Остроугольные включения с высокой жёсткостью (большим модулем упругости) не менее опасны, чем трещины, поскольку вызывают аналогичные сингулярные поля напряжений вида (17), (18). Поэтому для получения более высокой прочности материалов предпочтителен более мелкий размер жестких элементов, что способствует снижению коэффициентов K_1 и K_2 , аналогично случаям трещин.

7. Сингулярность полей напряжений в механически неоднородных соединениях наряду с изменениями свойств материалов [11, 12] является малоизученным явлением, требующим дальнейших исследований.

а) $E_1/E_2 = 1,5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; б) $E_1/E_2 = 5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; в) $E_1/E_2 = 25$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; г) $E_1/E_2 = 100$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; д) $E_1 = E_2$; $\nu_1 = 0,2$; $\nu_2 = 0,4$

Рисунок 2. Графики изменения показателя λ в зависимости от угла ω для разных соотношений упругих характеристик компонентов 1 и 2

СПИСОК ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Браутман Л., Крок Р., Меткалф А. Композиционные материалы: в 8 т. / Пер. с англ. С.С. Гинзбурга и Э.Я. Ольшанской; под ред. И.Л. Светлова. М.: Мир, 1978. Т. I: Поверхности раздела в металлических композициях. 438 с.

2. Келли А. Высокопрочные материалы. М.: Мир, 1976. 261 с.

3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

4. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.

5. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 5. С. 103–111.

6. Гумеров К.М., Колесов А.В., Гиндин А.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности концентраторов типа двугранного угла // Вопросы сварочного производства. Челябинск: ЧПИ, 1987. С. 3–8.

7. Гумеров К.М., Колесов А.В., Гиндин В.А. и др. К-подход к оценке сопротивляемости хрупкому разрушению элемента конструкции с концентраторами напряжений типа двугранного угла // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям. Челябинск: ЧПИ, 1987. С. 63–66.

8. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. Вып. 1. С. 178–186.

9. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Об условиях ограничения напряжений у ребра составного клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 5. С. 102–108.

10. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

11. Гумеров К.М. Механизмы изменения механических свойств металла труб и оборудования в водородосодержащих средах // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2016. № 3 (23). С. 84–89.

12. Лисин Ю.В. Исследование физико-химических свойств стали длительно эксплуатируемых трубопроводов, оценка ресурса безопасности работы // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2015. № 4 (20). С. 18–28.

REFERENCES

1. Brautman L., Krok R., Metkalf A. *Kompozitsionnye materialy*: v 8 T.: Per. s angl. [Composite Materials: in 8 Vol.: Transl. from Engl.]. Moscow, Mir Publ., 1978. T. I: Poverkhnosti razdelov v metallicheskih kompozitakh [Partitioning Surfaces in Metallic Composites]. 438 p. [in Russian].

2. Kelli A. *Vysokoprochnye materialy* [High-Strength Materials]. Moscow, Mir Publ., 1976. 261 p. [in Russian].

3. Cherepanov G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Sharp-Crack Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 640 p. [in Russian].

4. Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya* [Elastic-Plastic Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 502 p. [in Russian].

5. Mikhailov S.E. Singulyarnost' napryazhenii v okrestnosti rebra v sostavnom neodnorodnom anizotropnom tele i nekotorye prilozheniya k kompozitam [The Singularity of Stresses in the Vicinity of Edge in the Composite Heterogeneous Anisotropic Body, and Some Applications to Composites] *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Herald of AS SSSR. Mechanics of Solids*, 1979, No. 5, pp. 103–111. [in Russian].

6. Gumerov K.M., Kolesov A.V., Gindin A.V. Gumerov K.M., Kolesov A.V., Gindin A.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti kontsentratorov tipa dvugrannogo ugla [Stress-Strain State in the Vicinity of Concentrators such as a Dihedral Angle]. *Voprosy svarochnogo proizvodstva — Matters of the Welding Practice*. Chelyabinsk, ChPI, 1987, pp. 3–8. [in Russian].

7. Gumerov K.M., Kolesov A.V., Gindin V.A. e.a. K-podkhod k otsenke soprotivlyaemosti khrupkomu razrusheniyu elementa konstruktssii s kontsentratorami napryazhenii tipa dvugrannogo ugla [K-Approach to Assessing the Resistance to Brittle Fracture of Structural Member with Stress Concentrators such as a Dihedral Angle]. *Issledovaniya po stroitel'noi mekhanike i stroitel'nyim konstruktssiyam — Research into Structural Mechanics and Building Structures*. Chelyabinsk, ChPI, 1987, pp. 63–66. [in Russian].

8. Aksentyan O.K. Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra [Features of Stress-Strain State of the Plate in the Neighborhood of the Arris]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, Issue 1, pp. 178–186. [in Russian].

9. Aksentyan O.K., Lushchik O.N. Ob usloviyakh ogranichenosti napryazhenii u rebra sostavnogo klina [On the Conditions of Stress Limitation near the Edge of the Compo-site Wedge]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Herald of AS SSSR. Mechanics of Solids*, 1978, No. 5, pp. 102–108. [in Russian].

10. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 707 p. [in Russian].

11. Gumerov K.M. Mekhanizmy izmeneniya mekhanicheskikh svoystv metalla trub i oborudovaniya v vodorodosoderzhashchikh sredakh [Variation Mechanisms of Pipe and Equipment Metal Mechanical Features in Hydrogen-Containing Environment]. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefii i nefteproduktov — Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2016, No. 3 (23), pp. 84–89. [in Russian].

12. Lisin Yu.V. Issledovanie fiziko-khimicheskikh svoystv stali dlitel'no ekspluatiruemykh truboprovodov, otsenka resursa bezopasnosti raboty [Research of Physical and Chemical Properties of Steel for Continuously Operated Pipelines and Assessment of Safe Operational Life]. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefii i nefteproduktov — Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2015, No. 4 (20), pp. 18–28. [in Russian].

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ABOUT THE AUTHORS

Гумеров Кабир Мухаметович, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Управления стали, сварки и защиты от коррозии НТЦ ООО «НИИ Транснефть», г. Уфа, Российская Федерация

Kabir M. Gumerov, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Steel, Welding and Corrosion Control Department, Chief Researcher, Scientific and Technical Center, Transneft R&D, LLC, Ufa, Russian Federation

e-mail: GumerovKM@niitnn.transneft.ru

Распопов Андрей Александрович, кандидат технических наук, заместитель директора Центра инновационных программ, НИОКР и отраслевой стандартизации ООО «НИИ Транснефть», г. Москва, Российская Федерация

Andrei A. Raspopov, Candidate of Engineering Sciences, Deputy Director of the Center for Innovation Programs, R&D and Industry Standardization, NII Transneft, LLC, Moscow, Russian Federation

e-mail: RaspopovAA@niitnn.transneft.ru

Виноградов Леонид Викторович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, г. Москва, Российская Федерация

Leonid V. Vinogradov, Candidate of Engineering Sciences, Senior Researcher, Institute of Metallurgy and Materials Science named for A.A. Baikov, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

e-mail: ltdvin@yandex.ru