DOI: 10.17117/ns.2014.02.102

Поступило в редакцию: 16.12.2014

<http://ucom.ru/doc/ns.2014.02.102.pdf>

enter@pstu.ru

Фурина К.О., Осечкина Т.А.

Математическая модель одноканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью

Furina K.O., Osechkina T.A.

A mathematical model of a single-channel queuing system with limited queue

В работе даны необходимые теоретические сведения об одноканальной системе массового обслуживания с ограниченной очередью. Приведена блок-схема. Разработан подробный алгоритм, демонстрирующий модель системы массового обслуживания, на языке Паскаль

Ключевые слова: ограниченная очередь, система массового обслуживания, одноканальность

This paper gives the necessary theoretical knowledge about the single-channel queuing system with limited queue. Block diagram. A detailed algorithm showing model queuing system, in Pascal

Key words: limited turn, queuing system, single channel

Фурина Ксения Олеговна

Студент

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет
г. Пермь, Комсомольский пр., 29

Furina Kseniya Olegovna

Student

Perm National Research Polytechnic University
Perm, Komsomol ave., 29

Осечкина Татьяна Алексеевна

Кандидат физико-математических наук, доцент
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет
г. Пермь, Комсомольский пр., 29

Osechkina Tatiana Alekseyevna

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
assistant Professor
Perm National Research Polytechnic University
Perm, Komsomol ave., 29

В последние годы во многих областях практики возникает необходимость в решении различных вероятностных задач, связанных с работой систем массового обслуживания (СМО). Примеры таких систем: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, парикмахерские и т. п. Каждая такая система состоит из набора обслуживающих единиц, которые называются «каналами» обслуживания. В качестве каналов могут быть: линии связи; лица, выполняющие те ли иные операции; различные приборы и т. д. Различают системы массового обслуживания одноканальные и многоканальные.

Работа любой системы массового обслуживания заключается в выполнении поступающего на нее потока требований или заявок. Заявки приходят одна за другой в некоторые случайные моменты времени. Обслуживание посту-

пившей заявки продолжается какое-то время, после чего канал освобождается и снова готов для приема следующей заявки. Каждая система массового обслуживания, в зависимости от числа каналов и их производительности, обладает какой-то пропускной способностью, позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Предмет теории массового обслуживания – установление зависимости между характером потока заявок, производительностью отдельного канала, числом каналов и успешностью (эффективностью) обслуживания.

Таким образом, процесс функционирования системы массового обслуживания представляет собой случайный процесс. Чтобы дать рекомендации по рациональной организации системы, выяснить ее пропускную способность и предъявить к ней требования, необходимо изучить случайный процесс, протекающий в системе, и описать его математически. Этим и занимается теория массового обслуживания.

Заметим, что за последние годы область применения математических методов теории массового обслуживания непрерывно расширяется и все больше выходит за пределы задач, связанных с «обслуживающими организациями» в буквальном смысле слова. Многие задачи автоматизации производства оказываются близкими к теории массового обслуживания: потоки деталей, поступающих для выполнения над ними различных операций, могут рассматриваться как «потоки заявок», ритмичность поступления которых нарушается за счет случайных причин. Своеобразные задачи теории массового обслуживания возникают в связи с проблемой организации транспорта и системы сообщений. Близкими к теории массового обслуживания оказываются и задачи, относящиеся к надежности технических устройств: такие их характеристики, как среднее время безотказной работы, требуемое количество запасных деталей, среднее время простоя в связи с ремонтом и т. д., определяются методами, непосредственно заимствованными из теории массового обслуживания.

Проблемы, родственные задачам массового обслуживания, постоянно возникают в военном деле. Каналы наведения, линии связи, аэродромы, устройства для сбора и обработки информации представляют собой своеобразные системы массового обслуживания со своим режимом работы и пропускной способностью.

Трудно даже перечислить все области практики, в которых находят применение методы теории массового обслуживания. За последние годы она стала одной из самых быстро развивающихся ветвей теории вероятностей.

В коммерческой деятельности чаще встречаются СМО с ожиданием (очередью).

Рассмотрим простую одноканальную СМО с ограниченной очередью, в которой число мест в очереди m – фиксированная величина. Примерами такой СМО являются: парикмахерские с одним креслом; магазин самообслуживания с одним кассовым аппаратом и т.д.

Следовательно, заявка, поступившая в тот момент, когда все места в очереди заняты, не принимается к обслуживанию, не встает в очередь и покидает систему.

Граф этой СМО представлен на рисунке и при наличии только одного канала обслуживания все интенсивности потоков обслуживания равны μ .

Рис. 1. Граф СМО

Состояния СМО можно представить следующим образом:

S_0 – канал обслуживания свободен

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет.

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка.

S_3 – канал обслуживания занят, в очереди стоят две заявки.

...

S_{m+1} – канал обслуживания занят, в очереди все m мест заняты, любая следующая заявка получает отказ.

Для описания случайного процесса СМО напомним выражения, определяющие предельные вероятности состояний:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \rho \cdot \rho_0 \\ \rho_2 = \rho^2 \cdot \rho_0 \\ \rho_k = \rho^k \cdot \rho_0 \\ \dots\dots\dots \\ \rho_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot \rho_0 \\ \rho_0 = [1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{m+1}]^{-1} \end{array} \right.$$

Выражение для ρ_0 можно в данном случае записать проще, пользуясь тем, что в знаменателе стоит геометрическая прогрессия относительно ρ , тогда после соответствующих преобразований получаем:

$$\rho_0 = \frac{(1 - \rho)}{(1 - \rho^{m+2})}$$

Эта формула справедлива для всех ρ , отличных от 1, если же $\rho = 1$, то $\rho_0 = \frac{1}{m+2}$, а все остальные вероятности также равны $\frac{1}{m+2}$. Если предположить $m=0$, то мы переходим от рассмотрения одноканальной СМО с ожиданием к уже рассмотренной одноканальной СМО с отказами в обслуживании. Действительно, выражение для предельной вероятности ρ_0 в случае $m=0$ имеет вид:

$$\rho_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \text{ и в случае } \lambda = \mu \text{ имеем величину } \rho_0 = 1/2$$

Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием: относительную и абсолютную пропускную способность, вероятность отказа, а также среднюю длину очереди и среднее время ожидания заявки в очереди.

Заявка получает отказ, если она поступает в момент времени, когда СМО уже находится в состоянии S_{m+1} и, следовательно, все места в очереди m заняты и один канал обслуживает. Поэтому вероятность отказа определяется вероятностью появления состояния S_{m+1} :

$$\rho_{\text{отк}} = \rho_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot \rho_0$$

Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени, определяется выражением

$$Q = 1 - \rho_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} \cdot \rho_0$$

абсолютная пропускная способность равна

$$A = Q \cdot \lambda$$

Среднее число заявок $L_{\text{оч}}$, стоящих в очереди на обслуживание, определяется математическим ожиданием случайной величины k – числа заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = M(k)$$

Случайная величина k принимает следующие только целочисленные значения:

1 – в очереди стоит одна заявка,

2 – в очереди две заявки,

...

m – в очереди все места заняты.

Вероятности этих значений определяются соответствующими вероятностями состояний, начиная с состояния S_2 . Закон распределения дискретной случайной величины k изображается следующим образом:

k	1	2	...	m
p_i	p_2	p_3	...	p_{m+1}

Математическое ожидание этой случайной величины равно:

$$L_{\text{оч}} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + m \cdot p_{m+1}$$

В общем случае при $\rho \neq 1$ эту сумму можно преобразовать, пользуясь моделями геометрической прогрессии, к более удобному виду:

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot (m - m \cdot \rho + 1)}{(1 - \rho)^2} \cdot \rho_0$$

В частном случае при $\rho = 1$, когда все вероятности p_k оказываются одинаковыми, можно воспользоваться выражением для суммы членов числового ряда:

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Тогда получим формулу:

$$L'_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \rho_0 = \frac{m(m+1)}{2(m+2)} (\rho = 1)$$

Применяя аналогичные рассуждения и преобразования, можно показать, что среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди определяется формулами Литтла:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \text{ (при } \rho \neq 1 \text{) и } T'_{\text{оч}} = \frac{L'_{\text{оч}}}{\lambda} \text{ (при } \rho = 1 \text{)}$$

Такой результат, когда оказывается, что $T_{\text{оч}} \sim \frac{1}{\lambda}$, может показаться странным: с увеличением интенсивности потока заявок как будто бы должна возрастать длина очереди и уменьшается среднее время ожидания. Однако следу-

ет иметь в виду, что, во-первых, величина $L_{оч}$, является функцией от λ и μ и, во-вторых, рассматриваемая СМО имеет ограниченную длину очереди не более m заявок.

Заявка, поступившая в СМО в момент времени, когда все каналы заняты, получает отказ, и, следовательно, время ее «ожидания» в СМО равно нулю. Это приводит в общем случае (при $\rho \neq 1$) к уменьшению $T_{оч}$ с ростом λ , поскольку доля таких заявок с ростом λ увеличивается.

Если отказаться от ограничения на длину очереди, т.е. устремить $m \rightarrow \infty$, то случаи $\rho < 1$ и $\rho \geq 1$ начинают существенно различаться.

Записанные выше формулы для вероятностей состояний преобразуются в случае $\rho < 1$ к виду:

$$\begin{cases} \rho_0 = 1 - \rho \\ \rho_1 = \rho \cdot (1 - \rho) \\ \rho_2 = \rho^2 \cdot (1 - \rho) \\ \dots \dots \dots \\ \rho_k = \rho^k \cdot (1 - \rho) \end{cases}$$

При достаточно большом k вероятность ρ_k стремится к нулю. Поэтому относительная пропускная способность будет $Q=1$, а абсолютная пропускная способность станет равной $\rho_k A = Q \cdot \lambda = \lambda$, следовательно, обслуживаются все поступившие заявки, причем средняя длина очереди окажется равной:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

а среднее время ожидания по формуле Литтла:

$$T_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$$

В пределе $\rho \ll 1$ получаем:

$$T_{оч} = \frac{\rho}{\mu},$$

т.е. среднее время ожидания быстро уменьшается с увеличением интенсивности потока обслуживания. В противоположном случае при

$\rho \geq 1$ оказывается, что в СМО отсутствует установившийся режим. Обслуживание не успевает за потоком заявок, и очередь неограниченно растет со временем (при $t \rightarrow \infty$). Предельные вероятности состояний, поэтому не могут быть определены: при $Q=1$ они равны нулю. Фактически СМО не выполняет своих функций, поскольку она не в состоянии обслужить все поступающие заявки. Нетрудно определить, что доля обслуживаемых заявок и абсолютная пропускная способность соответственно составляют в среднем ρ и μ , однако неограниченное увеличение очереди, а, следовательно, и времени ожидания в ней приводит к тому, что через некоторое время заявки начинают накапливаться в очереди на неограниченно долгое время.

В качестве одной из характеристик СМО используют среднее время $T_{смo}$ пребывания заявки в СМО, включающее среднее время пребывания в очереди и среднее время обслуживания. Эта величина вычисляется по формулам Литтла:

если длина очереди ограничена:

$$T_{\text{СМО}} = \left(\frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} + \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} \right) = \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{q}{\mu} \right) = \frac{L_{\text{СМО}}}{\lambda} \text{ (при } \rho \neq 1 \text{)}$$

или

$$T_{\text{СМО}} = \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{q}{\mu} \right) = \frac{m+1}{2\mu} \text{ (при } \rho = 1 \text{)}$$

Разработаем математическую модель, описывающую одноканальную СМО с ограниченной очередью.

Модель должна позволять:

- Вычислять коэффициент загрузки канала.
- Определять вероятность отказа.

В качестве исходных данных возьмем:

- Общее число сгенерированных заявок за весь интервал наблюдений (Nmax).
- Длина максимальной очереди (Lmax).
- Интервал времени между появлением заявок (dt).
- Производительность или время выполнения заявки (dw).

Задать модель одноканальной СМО можно с помощью алгоритма на каком-либо языке программирования. Здесь выбран язык программирования Паскаль.

Примем следующие гипотезы:

1. Имитация работы системы происходит в системном времени (t), изначально t = 0.

2. Положим, что изначально равны нулю: число заявок, сгенерированных к моменту времени (N = 0), текущая длина очереди (L = 0), время окончания обслуживания n-й заявки (wt=0), суммарное время нахождения в занятом состоянии (Tw = 0), число обслуженных заявок (Nw = 0).

3. Интервал времени между появлением заявок (dt) и производительность или время выполнения заявки (dw) являются случайными величинами, распределенными по равномерному закону в интервале от t1 до t2 и от w1 до w2 соответственно.

```

Program SMO;
var t1, t2, w1, w2, N, Nmax, Nw, L, Lmax:integer;
    Potk, Kz, dw, dt, wt, t, Tw, ran :real;

Begin write('Nmax=');   readln(Nmax);
      write('Lmax=');   readln(Lmax);
      write('t1=');     readln(t1);
      write('t2=');     readln(t2);
      write('w1=');     readln(w1);
      write('w2=');     readln(w2);

wt:=0;
t:=0;
N:=0;
L:=0;
Nw:=0;
Tw:=0;
randomize;
while (N<=Nmax) do      begin ran:=round(25173*random+13849) mod 65536;
                        dt:=t1+((t2-t1)*ran)/65536;
                        t:=t+dt;

```



```

N:=N+1;
if wt <= t then begin dw:=w1+((w2-w1)*ran)/65536;
                  Nw:=Nw+1;
                  wt:=t+dw;
                  Tw:=Tw+dw;
                  L:=L-1;
                  end;
else if L < Lmax then L:=L+1;
end;

Potk:=(N-Nw)/N;
Kz:=Tw/t;
readln;
writeln('Potk=', Potk:5:3);
readln;
writeln('Kz=', Kz:5:3);
readln; end.

```

Рис. 2. Блок-схема

Такую математическую модель можно использовать в совершенно различных сферах деятельности человека: транспорт, связь, управление, бизнес, вычислительные комплексы и пр.

Построив имитационную модель этой СМО, получают показатели эффективности, по которым судят о качестве её функционирования.

Также эта работа будет полезна как методическое пособие для студентов.

Список литературы:

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.
2. Меженный О.А. Turbo Pascal. М.: Диалектика, 2008. 336 с.

References:

1. Wentzel E.S. Probability Theory. M.: Higher. sc., 1999. 576 p.
2. Mezheny O.A. Turbo Pascal. M.: Dialectics, 2008. 336 p.

© 2014, Фурина К.О., Осечкина Т.А.

Математическая модель одноканальной системы
массового обслуживания с ограниченной очередью

© 2014, Furina K.O., Osechkina T.A.

A mathematical model of a single-channel queuing
system with limited queue