DOI: 10.17117/na.2017.01.03.155

<http://ucom.ru/doc/na.2017.01.03.155.pdf>

Поступила (Received): 16.01.2017

Рождественский К.Н. Особенности влияния плоской границы на акустические свойства сфероидальных излучателей

Rozhdestvenskiy K.N.
**Features of the influence of flat boundaries on the
acoustic properties of spheroidal radiators**

Статья посвящена проблеме исследования волнового поля, образованного излучением вытянутого сфероида, находящегося вблизи плоской границы. Решение найдено в сфероидальной системе координат методом разделения переменных с привлечением теорем сложения. Полученная математическая модель позволяет судить об акустических характеристиках изучаемого объекта. Результаты численных экспериментов согласуются с классическими положениями теории

Ключевые слова: сфероид, излучение, плоская граница, импеданс

The article is devoted to the study of the wave field, formed by the radiation of an elongated spheroid near a flat boundary. The solution was found in a spheroidal coordinate system by separation of variables involving the addition theorems. The resulting mathematical model allows to judge about the acoustic characteristics of the studied object. The results of numerical experiments are consistent with classical theory

Key words: spheroid, radiation, flat border, impedanz

Рождественский Константин Николаевич

Кандидат физико-математических наук, доцент,
зав. Кафедрой

Институт законоведения и управления
всероссийской полицейской ассоциации
г. Тула, ул. Болдина, 98

Rozhdestvenskiy Konstantin Nikolaevich

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Associate Professor, Head of Department
Institute of jurisprudence and management of all-
Russian police association
Tula, Boldina st., 98

В теории приемных устройств для измерения колебательных скоростей частиц среды важное значение играет задача определения акустического поля тела, совершающего колебания рядом с некоторым препятствием. Данную проблему конкретизируем для случая, когда сфероид осциллирует в присутствии плоской безграничной стенки. Поскольку многие физические объекты могут быть приближенно аппроксимированы телами сфероидальной геометрии [4, с.515; 5, с.927; 6, с.925; 7, с.99], решение подобной задачи представляет определенный теоретический и практический интерес.

Пусть вытянутый абсолютно жесткий сфероид совершает малые гармонические колебания с частотой ω вдоль оси вращения, перпендикулярной идеальной плоскости (акустически мягкой или жесткой). Введем неподвижные

декартову x, y, z и сфероидальную ξ, η, φ системы координат. Тогда скорость колебаний точек поверхности ξ_0 изменяется по закону

$$V_n = V_0 \eta \left(\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2} \right)^{1/2} e^{-i\omega t},$$

где V_0 – амплитуда колебаний сфероиды, i – мнимая единица, t – время.

Потенциал скоростей звукового поля осциллирующего в безграничной среде сфероиды имеет вид [1, с. 514] :

$$\Psi = -\frac{1}{3} h V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1^{0n}(c)}{N_{0n}(c)} S_{0n}(c, \eta) \frac{R_{0n}^{(3)}(c, \xi)}{(R_{0n}^{(3)}(c, \xi))_{\xi}}, \quad (1)$$

где индекс « n » над знаком суммы означает, что суммирование ведется по нечетным n .

В формуле (1) введены следующие обозначения [2, с. 31]: h – половина фокусного размера сфероиды, c – волновой размер сфероиды, $d_1^{0n}(c)$ – коэффициенты разложения, $N_{0n}(c)$ – нормировочный множитель, $S_{0n}(c, \eta)$ – угловая вытянутая сфероидальная функция, $R_{0n}^{(3)}(c, \xi)$ – радиальная вытянутая сфероидальная функция третьего рода и ее производная.

Выражение для звукового давления на поверхности данного сфероиды определяется выражением $p = p_0 + i\omega\rho_0\Psi$, где p_0, ρ_0 – давление и плотность содержащей среды.

Можно считать, что значение характеристик звукового поля и импеданса тела, излучающего рядом с перегородкой, определится достаточно точно, если учесть добавки, возникающие при падении на тело волны, им излучаемой и отраженной стенкой (p_2) и волны, излучаемой телом, отраженной стенкой и рассеянной на теле (p_s). Поле p_2 найдем, используя метод мнимых источников и теорему сложения сфероидальных функций [3, с.196], для чего введем систему координат ξ_1, η_1, φ_1 с началом в центре мнимого сфероиды S_1 , расположенного симметрично перегородке.

Давление, оказываемое на сфероид S звуковой волной, отраженной от стенки, в координатах ξ_1, η_1, φ_1 запишем в виде

$$p_2 = \mp \frac{2}{3} K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1^{0n}(c)}{N_{0n}(c)} S_{0n}(c, \eta_1) \frac{R_{0n}^{(3)}(c, \xi_1)}{(R_{0n}^{(3)}(c, \xi_1))_{\xi_0}}, \quad K = i \rho_0 c_1 c V_0,$$

где верхний знак соответствует абсолютно жесткой, а нижний – абсолютно мягкой стенке. Здесь c_1 означает скорость звуковых волн.

В координатах ξ, η, φ выражение (1) имеет вид

$$p_2 = \mp \frac{4}{3} K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1^{0n}(c)}{N_{0n}(c) (R_{0n}^{(3)}(c, \xi_1))_{\xi_0}} \sum_{q=1}^{\infty} Q_{0q0n}(c, l) R_{0q}^{(1)}(c, \xi_1) S_{0q}(c, \eta_1),$$

где $Q_{0q0n} = \frac{i^{q-n}}{N_{0q}(c)} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=0,1}^{\infty} d_r^{0n}(c) d_t^{0q}(c) \sum_{\sigma=|r-t|}^{r+t} i^{\sigma} b_{\sigma}^{(t0r0)} h_{\sigma}^{(1)}(k_1 l)$, l – расстояние между центрами сфероидов ($l > 2h\xi$). Другие обозначения аналогичны приведенным в [3, с.197].

Далее определим звуковую волну p_2 , рассеянную на сфероиде S . Поле ищем в виде $p_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_{0n}(c, \eta_1) R_{0n}^{(3)}(c, \xi_1)$.

На поверхности S должно выполняться условие

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} (p_s + p_2) \right|_{\xi=\xi_0} = 0.$$

Погрешность данного равенства, возникающая из-за сноса граничных условий с подвижного тела на неподвижное, не превышает погрешности линеаризованных уравнений акустики, так как амплитуду колебаний сфероид считаем много меньшей длины излучаемой волны.

Тогда коэффициенты A_n определяются по формуле

$$A_n = \pm \frac{4}{3} K \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d_1^{0q}(c) Q_{0q0n}(c, l) R_{0n}^{(1)'}(c, \xi_0)}{N_{0q}(c) R_{0q}^{(3)'}(c, \xi_0) R_{0n}^{(3)'}(c, \xi_0)}.$$

Полное поле находится посредством суммирования выражений $p + p_2 + p_s$.

Важнейшей характеристикой акустического поля является импеданс Z , который определяется как сила реакции акустического поля, отнесенная к скорости приведения V_0 .

Для геометрии решаемой задачи импеданс определим так

$$Z = \frac{1}{V_0} \iint_S p \eta \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta}} dS.$$

Тогда не составит труда получить выражение импеданса сфероид, совершающего осцилляцию рядом с плоской перегородкой. Мы опускаем выражения для Z , Z_2 и Z_s из-за громоздкости представления.

По полученным аналитическим моделям были проведены численные расчеты зависимости значения импеданса от расстояния до перегородки, предполагаемой абсолютно мягкой. В качестве содержащей среды выбран воздух. Исследовано поведение активной и реактивной составляющих Z_2 и Z_s в зависимости от расстояния до перегородки для случая, когда $\xi_0=3$, $c=1$ и в зависимости от волнового размера для случая $\xi_0=3$, $l=10$.

Расчеты показали, что величина импеданса вытянутых сфероидов, осциллирующих около перегородки, значительно меньше импеданса сферы с радиусом, равным оси вращения сфероид. Отметим, что амплитуда изменения Z_s в несколько раз меньше амплитуды Z_2 . Эта разница быстро возрастает с ростом волнового размера сфероид. При достаточно больших частотах колебаний достаточно ограничиваться в подобных случаях поправкой, связанной лишь с волной, отраженной от стенки. Кроме того, частота пульсаций амплитуды ReZ_2 , ImZ_2 и ReZ_s , ImZ_s прямо пропорциональна величине волнового размера сфероид.

Таким образом, в результате численного эксперимента установлено, что добавочное сопротивление излучению $Re(Z_2 + Z_s)$ и присоединенная масса $Im(Z_2 + Z_s)$, возникающие из-за наличия перегородки ведут себя как квазипериодические функции от аргумента cl с амплитудой, убывающей обратно пропорционально расстоянию до перегородки. В случае, когда $l \rightarrow \infty$, будут иметь место выражения для сопротивления излучения и присоединенной массы сфероид, колеблющегося в безграничной среде.

Список используемых источников:

1. Андебур В.А. Акустические свойства сфероидальных излучателей // Акустический журнал. 1969. Т.15. №4. С. 513-522.

2. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука. 1976. 319с.
3. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника. 1968. 586 с.
4. K. N. Rozhdestvenskii, L. A. Tolokonnikov. Acoustic scattering by an elastic spheroid // Sov. Phys. Acoust. 1990. V. 36. P. 515-516.
5. Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акустический журнал. 1990. Т. 36. № 5. С. 927-930.
6. Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на сфероиде со смешанными граничными условиями//Акустический журнал. 1988.Т. 34. № 5. С. 925-928
7. Рождественский К. Н., Толоконников Л. А.. Акустические течения около сфероида //Прикладная механика и техническая физика.1988.№6.С. 99-102.

© 2017, Рождественский К.Н.

Особенности влияния плоской границы на
акустические свойства сфероидальных излучателей

© 2017, Rozhdestvenskiy K.N.

Features of the influence of flat boundaries on the
acoustic properties of spheroidal radiators