DOI: 10.17117/na.2017.01.03.141

<http://ucom.ru/doc/na.2017.01.03.141.pdf>

Поступила (Received): 24.01.2017

Бурова И.Г., Родникова О.В.
Аппроксимация функций одной переменной
полиномиальными интегро-дифференциальными
сплайнами пятого порядка

Burova I.G., Rodnikova O.V.
Approximation of functions of one variable with the polynomial
integro-differential splines of the fifth order

В работе предложены новые формулы для аппроксимации функций одной переменной. Для каждого интервала сетки аппроксимация строится отдельно на основе одномерных полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка при условии, что значения функции и значения ее первой производной известны в каждой точке сетки. Для построения аппроксимации используется квадратурная формула шестого порядка. Численные примеры представлены

Ключевые слова: полиномиальные сплайны, интегро-дифференциальные сплайны

The paper presents new formulae for the approximation of functions of one variable. For each grid interval the approximation is constructed separately on the basis of one-dimensional polynomial integro-differential splines of the fifth order, provided that the values of the function and its first derivative are known at each grid point. Here the approximation is constructed with a quadrature formula of the sixth order. Numerical examples are presented

Key words: polynomial spline, integro-differential splines

Бурова Ирина Герасимовна

Доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургский государственный университет

г. С.-Пб., Университетская наб., 7-9

Burova Irina Gerasimovna

Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor Saint-Petersburg state university

S.-Pb., Universitetskaya nab., 7-9

Родникова Ольга Вадимовна

Ассистент

Санкт-Петербургский государственный университет

г. С.-Пб., Университетская наб., 7-9

Rodnikova Olga Vadimovna

Assistant

Saint-Petersburg state university

S.-Pb., Universitetskaya nab., 7-9

Введение

Идея сплайн-интерполяции родилась в Англии в конце 19-го века, когда Британские инженеры разработали первые железнодорожные рельсы. Тогда сплайн интерполяции считалась более удачной альтернативой полиномиальной интерполяции. Сейчас известно множество разных типов сплайнов, которые используются для решения разнообразных математических, механических, физических и технических задач, например, см. [1]-[3].

Полиномиальные сплайны широко используются для интерполяции и аппроксимации дискретных данных. Множество исследований посвящено применению различных сплайнов для аппроксимации и оценки данных. Особое внимание уделено методам обработки изображений.

Постановка задачи

Рассмотрим функцию $U(x) \in C^5[a, b]$.

Обозначим $\{x_j = a + jh\}_{j=0}^n$ – набор равноотстоящих узлов на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$.

Предположим, что известны значения функции $U(x_j)$ и производной $U'(x_j)$ в узлах сетки, $j = 0, 1, \dots, n$.

Требуется аппроксимировать функцию $U(x)$ на отрезке $[a, b]$ функцией $\tilde{U}(x)$, которая задаётся на каждом участке $[x_j, x_{j+1}]$ формулой

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & U(x_j)\omega_{j,0}(x) + U(x_{j+1})\omega_{j+1,0}(x) + U'(x_j)\omega_{j,1}(x) \\ & + U'(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x) + V_j(U)\omega_j^{<0>}(x), \end{aligned} \quad (1)$$

и оценить погрешность аппроксимации.

Здесь

$$\begin{aligned} V_j(U) = & \frac{(x_{j+1} - x_{j-1})}{30} (7U(x_{j-1}) + 7U(x_{j+1}) + 16U(x_j)) \\ & - \frac{(x_{j+1} - x_{j-1})^2}{60} (U'(x_{j+1}) - U'(x_{j-1})) - \end{aligned}$$

квадратурная сумма в правой части известной квадратурной формулы (см.[4]):

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} U(x)dx = V_j(U) + O(h^6).$$

Построение базисных функций

Базисные функции $\omega_{j,0}(x)$, $\omega_{j+1,0}(x)$, $\omega_{j,1}(x)$, $\omega_{j+1,1}(x)$, $\omega_j^{<0>}(x)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, находятся из условий:

$$\tilde{U}(x) = U(x), \text{ если } U(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4.$$

Выполнив замену переменных $x = x_j + th$, $t \in [0, 1]$, базисные функции можно представить в следующем виде:

$$\omega_{j,0}(t) = (2t + 1)(t - 1)^2, \quad (2)$$

$$\omega_{j+1,0}(t) = -\frac{1}{8}t^2(15t^2 - 14t - 9), \quad (3)$$

$$\omega_{j,1}(t) = \frac{th}{4}(5t + 4)(t - 1)^2, \quad (4)$$

$$\omega_{j+1,1}(t) = \frac{ht^2}{8}(5t + 3)(t - 1), \quad (5)$$

$$\omega_j^{<0>}(t) = \frac{15t^2}{16h}(t - 1)^2. \quad (6)$$

Оценка аппроксимации

Теорема 1. Пусть $U(x) \in C^5[a, b]$, $\tilde{U}(x)$ задается формулами (1) – (6). Тогда справедливы оценки:

$$|\tilde{U}(x) - U(x)|_{[x_j, x_{j+1}]} \leq K_1 h^5 \|U^{(5)}\|_{[x_{j-1}, x_{j+1}]}, K_1 = 0.0225, \quad (7)$$

$$|\tilde{U}'(x) - U'(x)|_{[x_j, x_{j+1}]} \leq K_2 h^4 \|U^{(5)}\|_{[x_{j-1}, x_{j+1}]}, K_2 = 0.0994, \quad (8)$$

$$|\tilde{U}(x) - U(x)|_{[a+h, b]} \leq K_1 h^5 \|U^{(5)}\|_{[a, b]}. \quad (9)$$

Доказательство. Неравенство (7) следует из формулы Тейлора и следующих неравенств:

$$\begin{aligned} |\omega_{j,0}(x)| &\leq 1, |\omega_{j+1,0}(x)| \leq 1, \\ |\omega_{j,1}(x)| &\leq 0.216h, |\omega_{j+1,1}(x)| \leq 0.1198h, \\ |\omega_j^{<0>}(x)| &\leq 0.0586/h. \end{aligned}$$

Неравенство (9) следует из (7).

Неравенство (8) следует из формулы Тейлора и следующих неравенств:

$$\begin{aligned} |\omega'_{j,0}(x)| &\leq 1.5/h, |\omega'_{j+1,0}(x)| \leq 1.626/h, \\ |\omega'_{j,1}(x)| &\leq 1, |\omega'_{j+1,1}(x)| \leq 1, \\ |\omega_j^{<0>'}(x)| &\leq 0.181/h^2. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $U(x) \in C^5[a, b]$, $\tilde{U}(x)$ задается формулами (1) – (6). Тогда справедлива оценка:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (\tilde{U}(x) - U(x)) dx \leq 0.0081 h^6 \|U^{(5)}\|_{[x_{j-1}, x_{j+1}]}.$$

Доказательство. Аналогично теореме 1.

Результаты

В таблицах 1, 2 представлены погрешности аппроксимации функции $U(x)$ и её первой производной $U'(x)$, $x \in [-1, 1]$, сплайнами вида (1) и их теоретические оценки при $h = 0.1$ и $h = 0.01$, соответственно. Используются следующие обозначения:

$r_0 = \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{U}(x) - U(x)|$ и $r_1 = \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{U}'(x) - U'(x)|$ – фактические погрешности аппроксимации функции и её первой производной, соответственно; R_0 и R_1 – теоретические оценки погрешностей аппроксимации функции и её первой производной, соответственно. Вычисления выполнены в среде Maple с точностью до 20 знаков в мантиссе.

Таблица 2

$U(x)$	r_0	R_0	r_1	R_1
$\frac{1}{1+25x^2}$	1.418e-3	1.507e-2	5.062e-2	3.121
$\sin(5x) - \cos(5x)$	2.915e-5	9.944e-4	8.196e-4	4.393e-2
$tg(x)$	1.729e-5	7.808e-4	4.939e-4	3.449e-2
$\sin(3x) \cos(5x)$	1.062e-4	3.687e-3	2.991e-3	1.623e-1

Таблица 3

$U(x)$	r_0	R_0	r_1	R_1
$\frac{1}{1+25x^2}$	2.077e-8	7.064e-7	5.836e-6	3.121e-4
$\sin(5x) - \cos(5x)$	3.245e-10	9.944e-9	8.244e-8	4.393e-6
$tg(x)$	4.364e-10	7.808e-9	6.279e-8	3.449e-6
$\sin(3x) \cos(5x)$	1.092e-9	3.687e-8	3.058e-7	1.629e-5

Выводы

Из представленных в таблицах результатов видно, что теоретические оценки погрешности согласуются с фактическими. Порядок полученных величин соответствует формулам (7) – (9). Качество теоретической оценки погрешности зависит от исходной функции, а точнее говоря, от величины её пятой производной, что особенно заметно для первой функции таблицы.

Список используемых источников:

1. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. 480 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.П., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 355 с.
3. Бурова И.Г. Аппроксимация вещественными и комплексными минимальными сплайнами. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. 144 с.
4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

© 2017, Бурова И.Г., Родникова О.В.

Аппроксимация функций одной переменной полиномиальными интегро-дифференциальными сплайнами пятого порядка

© 2017, Burova I.G., Rodnikova O.V.

Approximation of functions of one variable with the polynomial integro-differential splines of the fifth order