DOI: 10.17117/na.2017.01.02.138

Поступила (Received): 23.01.2017

<http://ucom.ru/doc/na.2017.01.02.138.pdf>**Майер Р.В., Романов А.А.****О численном решении уравнения Пуассона при моделировании электростатических полей****Mayer R.V., Romanov A.A.****About the numerical decision of the equation Пуассона at modeling of electrostatic fields**

В статье рассмотрен метод численного решения дифференциального уравнения Пуассона с целью расчета распределения потенциала электростатического поля в двумерной области. Проанализированы примеры решения двух задач в декартовых и сферических координатах

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, компьютерная модель, обучение, программирование, численные методы

The article describes the method of numerical solution of the Poisson differential equation to calculate the distribution of the electrostatic field potential in the two-dimensional area. Examples of the solution of two tasks in the Cartesian and spherical coordinates are analysed

Key words: computing experiment, computer model, training, programming, numerical methods

Майер Роберт Валерьевич

*Доктор педагогических наук, профессор
Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко
г. Глазов, ул. Первомайская, 25*

Mayer Robert Valerievich

*Doctor of Pedagogic Sciences, Professor
Glazov state pedagogical institute named V.G. Korolenko
Glazov, Pervomayskaya st., 25*

Романов Алексей Анатольевич

*Студент
Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко
г. Глазов, ул. Первомайская, 25*

Romanov Alexey Anatolievich

*Student
Glazov state pedagogical institute named V.G. Korolenko
Glazov, Pervomayskaya st., 25*

В школьном курсе информатики [2, 3] обсуждаются вопросы, связанные с моделированием динамических систем, статистическим моделированием, созданием графических моделей и т. д. Поэтому изучение методов численного решения дифференциальных уравнений и компьютерного моделирования физических систем имеет большое значение для подготовки студентов педагогических вузов, планирующих стать учителями информатики, математики и физики. В этой связи большой интерес представляет собой численное решение уравнения Пуассона, что позволяет рассчитать распределение потенциала в случае, когда электростатическое поле создается протяженными заряженными телами, рядом с которыми находятся проводники. К этому уравнению сводится задача о нахождении формы упругой пленки, натянутой на изогнутый каркас.

Пусть в ограниченной области заданы распределение плотности заряда $\rho(x, y, z)$, диэлектрическая проницаемость среды ε и потенциал $\varphi(x, y, z)_S$ вдоль границы S рассматриваемой области (включая поверхности проводников). Чтобы рассчитать распределение потенциала $\varphi(x, y, z)$ внутри рассматриваемой области, требуется решить уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0$. В декартовых координатах для однородной двумерной среды оно имеет вид [1]:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Расчет электростатического поля требует решения задачи Дирихле, состоящей в определении функции $\varphi(x, y)$, превращающей уравнение Пуассона в истинное высказывание во всех точках вне проводников; она должна быть равна заданным значениям $\varphi(x, y)_S$ на поверхностях проводников и границе области Ω .

Для поиска $\varphi(x, y)$ используют метод сеток: 1) от непрерывной области Ω переходят к сеточной области $\Omega_{\Delta x, \Delta y}$; 2) для узлов сетки $\Omega_{\Delta x, \Delta y}$ составляют конечно-разностные уравнения; 3) исходя из начальных и граничных условий, задают начальные значения искомой функции $\varphi(x, y)$ и ее значения в граничных узлах сетки $\Omega_{\Delta x, \Delta y}$; 4) решают получившуюся систему конечно-разностных уравнений, определяя значения функции $\varphi(x, y)$ в узлах сетки методом последовательных приближений. Переход от решаемого ДУЧП к конечно-разностному уравнению осуществляется путем замены производных на их конечно-разностные аппроксимации (здесь $\Delta x = \Delta y = h$):

$$\frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} = -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \frac{\rho_{i,j}h^2}{\varepsilon\varepsilon_0})/4.$$

Задается нулевое приближение потенциала $\varphi_{i,j}^0$ в заданной области, затем вычисляется первое приближение $\varphi_{i,j}^1$, исходя из найденных значений, рассчитывается второе приближение $\varphi_{i,j}^2$, потом третье $\varphi_{i,j}^3$ и т.д. После нескольких тысяч итераций находится распределение, достаточно близкое к истинному.

Рис. 1. Результаты расчета распределения потенциала электрического поля

Допустим, имеется проводящая пластина, рядом с которой расположен заостренный проводник и точечный заряд. Потенциалы пластины и острия

имеют разные знаки. Используемая компьютерная программа перебирает все узлы двумерной сетки и пересчитывает потенциалы. В результате нескольких тысяч итераций получается распределение потенциала $\varphi_{i,j}^k$, изображенное на рис. 1.1. Между острием и пластиной линии равного потенциала расположены очень близко, напряженность велика. На рис. 1.2 представлено распределение потенциала электрического поля двух параллельных пластин с $\varphi = 100$ В, между которыми находится металлический шарик с потенциалом $\varphi_1 = 20$ В. На рис. 1.3 приведены результаты моделирования электрического поля, созданного бесконечной металлической трубой, внутри которой параллельно ее оси расположены три линейных проводника, имеющих различные потенциалы.

Рассмотрим еще одну задачу. Внутри сферической полости радиуса R , выполненной в проводящей среде с потенциалом φ_1 , расположен шаровой слой диэлектрика радиуса r_1 и толщиной b_1 , по объему которого равномерно распределен электрический заряд с плотностью ρ (рис. 2.1). Он окружен металлической сферой радиуса r_2 и толщиной b_2 , потенциал которой φ_2 . Необходимо рассчитать потенциал и напряженность электростатического поля.

Рис. 2. Расчет напряженности и потенциала электростатического поля

Электростатическое поле обладает сферической симметрией. Запишем уравнение Пуассона в сферических координатах:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}.$$

В конечных разностях получаем:

$$\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta r} = -\frac{\rho_i}{\varepsilon_0},$$

$$\varphi_i^{k+1} = \frac{\varphi_{i-1}^k + \varphi_{i+1}^k}{2} + \frac{\Delta r}{2r} (\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k) + \frac{\rho_i \Delta r^2}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля вычисляется из формул:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, E_r = -\partial\varphi/\partial r, E_i = -(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})/(2\Delta r).$$

Используется программа 1 (Free Pascal); результаты моделирования при $\rho = 0,1$, $\varphi_1 = 15$ и $\varphi_2 = -2$ представлены на рис. 2.2. Видно, что вблизи центра O ($r < r_1$) потенциал постоянный, а напряженность равна 0. Внутри шарового слоя ($r_1 < r < r_1 + b_1$) по мере увеличения r напряженность растет, потенциал убывает. Внутри металлических электродов потенциал постоянен, а напряженность

равна 0. В промежутках между шаровым слоем, сферическим электродом и поверхностью полости потенциал и напряженность с ростом r убывают.

Программа 1. (Free Pascal)

```
{ $N+ } uses crt, graph; const n=400; dr=0.5; var i,k,DV,MV: integer;
r,rho,E: single; fi,fi1: array[1..N] of single;
Procedure Raschet;
begin fi[N]:=-2;fi[1]:=fi[2]; For i:=2 to N-1 do begin r:=i*dr; If (r<40)
and(r>20) then rho:=0.1 else rho:=0;If (r>70)and(r<80) then fi[i]:=15; If
(r>180) then fi[i]:=-2; fi1[i]:=(fi[i-1]+fi[i+1])/2+dr*(fi[i+1]-fi[i-1])/
2/r+rho*dr*dr/2; end; For i:=2 to N-1 do fi[i]:=fi1[i]; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'');
Repeat inc(k); Raschet;If k>2000 then begin cleardevice;k:=0; For i:=2 to
N-1 do begin circle(20+round(3*i*dr),620-round(7*fi[i]),1); E:=- (fi[i+1]-
fi[i-1])/2/dr; circle(20+round(3*i*dr),620-round(60*E),1); end; circle(20,
620,round(3*20)); circle(20,620,round(3*40)); circle(20,620,round(3*70));
circle(20,620,round(3*80)); circle(20,620,round(3*180)); end;
until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

Методы расчета электрических полей в других случаях (неоднородная среда, цилиндрические координаты и т.д.) подробно проанализированы в учебном пособии Р.В. Майера [1] для педагогических вузов.

Список используемых источников:

1. Майер Р.В. Компьютерное моделирование. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т. 2015. 620 с.
URL: <http://maier-rv.glazov.net>
2. Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика. М.: Академия, 2003. 816 с.
3. Угринович Н.Д. Исследование информационных моделей. Элективный курс. М., БИНОМ. Лаборатория знаний. 2004. 183 с.

© 2017, Майер Р.В., Романов А.А.

О численном решении уравнения Пуассона при моделировании электростатических полей

© 2017, Mayer R.V., Romanov A.A.

About the numerical decision of the equation Пуассона at modeling of electrostatic fields