DOI: 10.17117/na.2016.12.02.220

<http://ucom.ru/doc/na.2016.12.02.220.pdf>

Поступила (Received): 15.12.2016

Мельман В.С., Кручинин Д.В., Шабля Ю.В. Моделирование процесса вычисления коэффициентов производящих функций

Melman V.S., Kruchinin D.V., Shayblya Yu.V.
Modeling of the process of calculating
the generating functions coefficients

В данной работе рассматривается актуальность исследования способов нахождения коэффициентов производящих функций. Для данного исследования предлагается написать библиотеку для работы с производящими функциями в математическом пакете «Mathematica». В работе приводится функциональная модель процесса вычисления коэффициентов производящих функций с использованием математического пакета «Mathematica»

Ключевые слова: производящие функции, коэффициенты, композита, «Mathematica»

Мельман Вадим Сергеевич

Студент

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
г. Томск, пр. Ленина, 40

Кручинин Дмитрий Владимирович

Младший научный сотрудник

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
г. Томск, пр. Ленина, 40

Шабля Юрий Васильевич

Младший научный сотрудник

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
г. Томск, пр. Ленина, 40

This paper is considering the research relevance of the ways of finding generating functions coefficients. For this research it is suggested to write a library for working with generating functions in a computer algebra system "Mathematica". The work presents a functional model of the generating functions coefficient calculation process with the use of the computer algebra system "Mathematica"

Key words: generating functions, coefficients, composita, "Mathematica"

Melman Vadim Sergeevich

Student

Tomsk state university of control systems and radio electronics
Tomsk, Lenina ave., 40

Kruchinin Dmitriy Vladimirovich

Junior Researcher

Tomsk state university of control systems and radio electronics
Tomsk, Lenina ave., 40

Shablya Yuriy Vasilevich

Junior Researcher

Tomsk state university of control systems and radio electronics
Tomsk, Lenina ave., 40

Числовым рядом или рядом называют бесконечную числовую последовательность. Ряды широко применяются в численных методах: для приближённого вычисления значений функций, определённых интегралов, решения дифференциальных уравнений, в интерполяции, аппроксимации.

Наибольшее применение на практике нашли степенные ряды, это ряды, членами которого являются степенные функции аргумента x . Наиболее известными являются степенные ряды Тейлора и Маклорена. Для практического использования в большинстве задач математического анализа необходимо выполнение условия сходимости ряда. Если ряд не сходится, то его называют формальным степенным рядом [1, 2].

Схожим понятием с рядом Тейлора является производящая функция. Производящей функцией называют формальный степенной ряд, то есть если на производящую функцию наложить условие сходимости, то она будет являться рядом Тейлора. Большое значение производящие функции нашли в комбинаторном анализе [3,4].

Главной практической задачей, связанной с применением степенных рядов, является нахождение коэффициентов при степенях x . Для её решения используется метод, основанный на определении ряда Тейлора и комбинированный метод на основе табличных разложений [2].

У данных методов есть существенный недостаток – большая вычислительная сложность нахождения коэффициентов. Недавно был предложен новый метод нахождения коэффициентов производящих функций, основанный на композитах [5,6], который может быть использован для нахождения коэффициентов ряда Тейлора. Данный способ нуждается в исследовании для определения его эффективности и сравнения с существующими.

Целью исследования является анализ нового способа нахождения коэффициентов производящих функций.

Для достижения данной цели предлагается автоматизировать процесс нахождения коэффициентов производящих функций, основанный на композитах, с использованием математического пакета «Mathematica» для последующего сравнения его с существующими способами нахождения коэффициентов.

В рамках данной работы моделируется процесс нахождения коэффициентов с использованием композит в математическом пакете, для последующего написания библиотеки для работы с производящими функциями

Предлагаемый подход нахождения коэффициентов с использованием композит основан на обыкновенных производящих функциях.

Обыкновенной производящей функцией [5,6]. $F(x)$ называется ряд, принадлежащий кольцу формальных степенных рядов с одной переменной $K[x]$:

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f(n)x^n$$

Где $f(n): P \rightarrow K$, P – множество неотрицательных чисел, K – коммутативное поле.

Композитой [5, 6] обыкновенной производящей функции $F(x) = \sum_{n \geq 0} f(n)x^n$ будем называть функцию $F(n,k)$, являющуюся коэффициентами производящей функции $F(x)^k = \sum_{n \geq 0} F(n,k)x^n$, и обозначать её $F^\Delta(n,k)$.

Для композиты выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$F^\Delta(n,k) = \begin{cases} f(n), & k=1, \\ \sum_{i=1}^{n-k+1} f(i)F^\Delta(n-1,k-1), & k \leq n. \end{cases}$$

Как видно из определения, композита – это коэффициенты степеней производящих функций. Таким образом, определив формулы нахождения композит для основных операций с производящими функциями и композиты для простейших производящих функций, будут определены формулы для нахождения коэффициентов сложных производящих функций. В работе [6] представлены композиты для основных простейших полиномов, рациональных производящих функций, производящих функций логарифмов, радикалов, тригонометрических и гиперболических производящих функций, производящих функций на основе экспоненты, а также правила для вычисления композит производящих функций для операций их композиции, сложения, умножения и других.

Для процесса вычисления коэффициентов производящих функций по описанному методу в математическом пакете «Mathematica» была построена функциональная модель IDEF0 [7], чёрный ящик данной модели представлен на рисунке 1.

Рис. 1. Чёрный ящик процесса вычисления производящих функций

Для вычисления коэффициентов производящих функций пользователю необходимо знать расположение библиотеки, чтобы указать её путь в программе «Mathematica», также ему необходима функция, для которой будут посчитаны коэффициенты. Поскольку декомпозицию функции выполняет пользователь, ему требуется знать основные понятия теории производящих функций для выполнения разложения функции на простейшие элементы. Так как процесс описан для работы в пакете «Mathematica» пользователю необходимо вводить все команды для вычисления на языке Wolfram Language, который понятен ядру программы, которое выполняет все вычисления. В итоге пользователь получает коэффициенты производящей функции.

На рисунке 2 представлена декомпозиция чёрного ящика модели процесса нахождения коэффициентов производящих функций.

В данной работе был смоделирован процесс нахождения коэффициентов производящих функций с использованием композит. Планируется, применив данную модель, написать библиотеку для вычисления коэффициентов производящих функций, которая будет содержать композиты простейших производящих функций и правила вычисления для основных операций с производящими функциями. На основе данной библиотеки произвести сравнение нового метода с существующими.

Список используемых источников:

1. Матяш В.И. Ряды. Курс лекций. Расчётно-графическая работа. М.: МГТУ, 2007. 151 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис Пресс, 2006. 608 с.
3. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
4. Wilf. H.S. Generatingfunctionology. Academic Press. 1994. 226 p.
5. Кручинин В.В. Комбинаторика композиций и её приложения. Томск: В-Спектр, 2010. 156с.
6. Кручинин В.В. Кручинин Д.В. Степени производящих функций и их применение: монография. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2013. 236 с.
7. РД IDEF0 – 2000 методология функционального моделирования IDEF0. М.: Госстандарт России, 2000. 75 с.

© 2016, Мельман В.С., Кручинин Д.В., Шабля Ю.В.
Моделирование процесса вычисления
коэффициентов производящих функций

© 2016, Melman V.S., Kruchinin D.V., Shayblya Yu.V.
Modeling of the process of calculating the generating
functions coefficients