DOI: 10.17117/na.2016.11.02.315

Поступила (Received): 19.11.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.11.02.315.pdf>

Ершов Л.А. Формулы для расчета деформаций пирамидального купола

Ershov L.A.

The formula for calculating the deformations of a pyramidal dome

Методом вырезания узлов рассчитываются усилия в стержнях осесимметричной конструкции под действием вертикальной нагрузки на вершину купола для произвольного числа вершин основания пирамиды. Прогиб вычисляется по формуле Максвелла-Мора. Получена точная формула для случая фиксированного внутреннего объема сооружения

Ключевые слова: ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, купол

Using cut nodes the forces in the rods of axisymmetric structures under the action of vertical load on the top of the dome for an arbitrary number of vertices of the base of the pyramid are calculated. The deflection is calculated by the formula of Maxwell-Mohr. Obtained the exact formula for the case of a fixed internal volume of the structure

Key words: truss, deflection, Maxwell's formula-Mora, dome

Ершов Леонид Александрович

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Ershov Leonid Alexandrovich

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Рассмотрим стержневую конструкцию, состоящую из шарнирно соединенных упругих стержней (рис. 1). В общем случае купол состоит из n стержней и опирается на n вертикальных стержневых опор.

Рис. 1. Купол, $n=6$. Размеры конструкции

В точке B ферма имеет также сферическую опору (три реакции), в точке C – цилиндрическую (две реакции; ось цилиндра направлена на шарнир B). Таким

образом в ферме $n+1$ шарнир, для равновесия которых требуется $3(n+1)$ уравнение, $2n$ стержней в куполе, 3 стержня в сферической опоре B (два горизонтальных стержня на рисунке не отображены), два стержня в цилиндрической опоре C (изображен только вертикальный стержень) и $n-2$ вертикальные опоры (стойки). Общее число стержней соответствует числу уравнений $2n+3+2+n-2=3(n+1)$. Система статически определима. Определение прогиба в общем случае n -угольной конструкции будем рассматривать на примере шестиугольной, используя метод вырезания узлов. Вырезаем узел A (рис. 3).

Рис. 3. Узел A

Сумма сил, действующих на узел A в проекции на вертикаль имеет вид: $nN \cos \alpha + P = 0$. Отсюда найдем усилие в стержнях купола $N = -P / (n \cos \alpha)$, где $\cos \alpha = b / c$, $c = \sqrt{b^2 + R^2}$. Вырезаем один из узлов контура (рис. 4). Сумма сил в проекции на ось u : $N \sin \alpha + 2S \cos \beta = 0$. Очевидно, $\beta = 90 - \gamma$, где $\gamma = \pi / n$. Из этого уравнения найдем усилие $S = -N \sin \alpha / (2 \sin \gamma)$. С учетом значения N получим усилие в стержнях горизонтального контура: $S = P \tan \alpha / (2n \sin \gamma)$. Из уравнения равновесия этого же узла в проекции на вертикаль получаем усилия в опорных стойках: $T = N \cos \alpha$.

Рис. 4. Усилия в узле B

Расчет прогиба проводится по формуле Максвелла – Мора. $E\Delta = P(nN^2 c / F_1 + nS^2 a / F_2 + nT^2 h / F_3)$, где $F_k, k = 1, 2, 3$ – площади сечений стержней. После подстановки усилий и алгебраических преобразований (используем систему Maple [1]) получаем искомое выражение для прогиба вершины купола:

$$E\Delta = \frac{P}{n} \left[\frac{(b^2 + R^2)^{3/2}}{F_1 b^2} + \frac{R^3}{F_2 2b^2 \sin \gamma} + \frac{h}{F_3} \right].$$

График зависимости величины прогиба Δ от числа n имеет вид:

Рис. 5. Зависимость прогиба от числа углов ($P=1$)

Рассмотрим четырехугольную ($n=4$) конструкцию. Объем для неё определяется выражением: $V = a^2 h + a^2 b / 3$, откуда с учетом $a = R \sin \gamma$ при $\gamma = \pi / 4$ получим $R = \sqrt{\frac{2V}{h + b/3}}$. Построим график зависимости прогиба от h при значении площадей поперечных сечений $F_1 = 2F$, $F_2 = F$, $F_3 = 0.5F$ и заданной высоте b и объеме V (рис. 6).

Рис. 6. Зависимость прогиба от высоты опорных стержней h

Аналогичные точные решения были получены методом индукции в системе Maple для плоских [2-8] и пространственных ферм [9-14]. Сравнительный обзор аналитических решений для плоских ферм можно найти в [15,16].

Список используемых источников:

1. Кирсанов М. Н. *Maple и MapleT. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. №5(39). С. 61–68.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16–19.
4. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35–44.
5. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С. 19–22.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 19–24.
8. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14–17.
9. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
10. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 214–217.
11. Voropai R.A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads // *Science Almanac*. 2016. N 9-2(23). p.17-20.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 28–34.
14. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32–38.
15. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
16. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

© 2016, Ершов Л.А.

Формулы для расчета деформаций пирамидального купола

© 2016, Ershov L.A.

The formula for calculating the deformations of a pyramidal dome