DOI: 10.17117/na.2016.11.02.289

<http://ucom.ru/doc/na.2016.11.02.289.pdf>

Поступила (Received): 28.11.2016

Васильков И.Д., Кирсанов М.Н. Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей

Vasilkov I.D., Kirsanov M.N.

The formulas for determining the deflection and displacement of the support of the Bollman's truss with an arbitrary number of panels

Найдено аналитическое решение задачи о прогибе плоской статически определимой фермы. Для определения усилий в стержнях использован метод вырезания узлов, а для определения смещений – формула Максвелла – Мора. Обобщение решения на произвольное число панелей получено методом индукции

Ключевые слова: ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple

Analytical solution for the deflection of statically determinate flat truss is obtained. To determine the stresses in the elements used method of cutting nodes, and to determine the displacement – formula of Maxwell – Mohr. Generalization of the solution for an arbitrary number of panels obtained by the method of induction

Key words: truss, deflection, Maxwell-Mohr' formula, Maple

Васильков Илья Денисович

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Vasilkov Ilya Denisovich

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Кирсанов Михаил Николаевич

Доктор физико-математических наук, профессор

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Kirsanov Mikhail Nikolaevich

Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Рассмотрим ферму с раскосной решеткой (рис. 1). Ферма с n панелями (две крайние панели в это число не входят) статически определимая и содержит $m=8(n+1)$ стержней (включая три опорные). Усилия в стержнях для ферм с конкретным заранее заданным числом панелей определим методом вырезания узлов. Затем по формуле Максвелла – Мора найдем прогиб. Серию решений (в аналитической форме) для различного числа панелей обобщим методом индукции. Ранее этот метод применялся в аналогичных задачах для плоских [1-10] и пространственных ферм [11-15]. Все решения, преобразования и обобщения с применением аппарата составления и решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты в искомой формуле прогиба, выполним в системе компьютерной математики по программе, приведенной в [16] в системе Maple.

Рис. 1. Ферма при $n=3$

Приведем для примера фрагмент программы ввода координат узлов

```
> for i to 2*n+1 do # нижние узлы стоек
> x[i]:=a*(i-1)+a:y[i]:=0:
> od:
> for i to 2*n+3 do # верхние узлы стоек (горизонтальный пояс)
> x[i+2*n+1]:=a*(i-1):y[i+2*n+1]:=b:
> od:
> # Опоры
> x[u-2]:=-2: y[u-2]:=b:
> x[u-1]:=0: y[u-1]:=b-1:
> x[u]:=x[4*n+4]: y[u]:=b-1:
```

Здесь $u=4n+7$ – число узлов фермы. Прогиб определяем по формуле Максвелла – Мора: $\Delta = P \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF)$, где S_i – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, s_i – усилия от действия единичной нагрузки, приложенной к середине нижнего пояса, l_i – длины стержней, EF – их жесткость. Последовательный расчет ферм с 1,2, 3 ... 18 панелями показывает, что формула для прогиба имеет всякий раз один и тот же вид

$$EF\Delta_n = P \frac{A_n a^3 + B_n b^3 + C_n c^3 + G_n g^3}{2 \cdot 4^n b^2}, \text{ где } c = \sqrt{a^2 + b^2}, g = \sqrt{4a^2 + b^2}.$$

По данным полученных расчетов методом индукции из решения рекуррентных уравнений 9-го порядка выводим следующие выражения для коэффициентов:

$$A_n = (27 \cdot 4^{n+1} n^3 + (297 \cdot 4^n - 18) n^2 + (-60 + 216 \cdot 4^n + 24(-2)^n) n - 50 + 40(-2)^n + 91 \cdot 4^n) / 81,$$

$$B_n = (27 \cdot 4^n n^3 + 9n^2 + 135n^n 4^{n-1} + 30n + 54 \cdot 4^n n + 42(-2)^n n + 25 + 349 \cdot 4^{n-1} + 70(-2)^n) / 81,$$

$$C_n = (12 \cdot 4^n n^3 + 6n^2 - 3 \cdot 4^n n^2 + 20n - 12 \cdot 4^n n + 24(-2)^n n + 50 / 3 + 40(-2)^n + (73 / 3) \cdot 4^n) / 81,$$

$$G_n = (9 \cdot 4^n n^3 - 9n^2 + (117 / 2) 4^n n^2 + 18n(-1)^{n+1} 2^n - 30n + (225 / 2) 4^n n + 30(-1)^{n+1} 2^n - 25 + 55 \cdot 4^n) / 243.$$

Аналогично выводится формула для горизонтального смещения опоры под действием вертикальной нагрузки $EF\Delta_{sm} = P(n+1)^2 a^2 / b$. График зависимости относительного смещения $\Delta' = \Delta_{sm} EF / P$ при $L=an=10$ м дан на рисунке 2.

В [17] можно найти сравнительный обзор аналогичных решений для плоских ферм.

Рис. 2. Зависимость смещения опоры от числа панелей

Список используемых источников:

1. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load //Science Almanac. 2016. N 4-3(18). pp.257-259.
2. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss//Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12.
3. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice //Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.238-240.
4. Ершов Л.А. Расчет прогиба балочной фермы, загруженной по верхнему поясу и половине верхнего пояса в аналитической форме//Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 21-23.
5. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы// Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. №5(39). С. 61-68.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16-19.
7. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58-65.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 19-24.
10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14-17.
11. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52-58.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью//Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
13. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.

13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
14. Voropai R.A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads// Science Almanac. 2016. N 9-2(23). pp.17-20.
15. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
16. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

© 2016, Васильков И.Д., Кирсанов М.Н.

Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей

© 2016, Vasilkov I.D., Kirsanov M.N.

The formulas for determining the deflection and displacement of the support of the Bollman's truss with an arbitrary number of panels