DOI: 10.17117/na.2016.11.02.248

<http://ucom.ru/doc/na.2016.11.02.248.pdf>

Поступила (Received): 02.11.2016

Табишев В.И.
Составление математической модели
термостатируемого экрана

Tabishev V.I.
Drawing up a mathematical model of a thermostatic screen

Неотъемлемой частью проектирования автоматизированных систем является математическое моделирование объекта управления. В статье рассказывается о том, как составляется математическая модель на примере реального объекта управления – термостатируемого экрана. После проведения математическое моделирование сравниваются смоделированные результаты и результаты эксперимента

Ключевые слова: математическое моделирование, тепловые процессы, термодинамика, испытания, автоматизация

An integral part of the design of automated systems is the mathematical modeling of control object. The article tells about how a mathematical model drawn up by the example of the real object of control – thermal screen. After the mathematical modeling results are compared simulated and experimental results

Key words: mathematical modeling, thermal processes, thermodynamics, test automation

Табишев В.И.

Специалист, студент

Санкт-петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Tabishev V.I.

Specialist, student

Saint-Petersburg national research university of information technologies, mechanics and optics
St. Petersburg, Kronverksky ave., 49

Термостатируемый экран располагается внутри вакуумной камеры и представляет собой полую оболочку внутри которой прокачивается газообразный азот. Между термостатируемым экраном, стенкой вакуумной камеры и исследуемым объектом происходит теплообмен излучением. Термостатируемый экран создает вокруг исследуемого объекта равномерное температурное поле, уменьшая воздействие окружающей среды.

При математическом описании процессов теплообмена излучением в вакууме пользуются системой нелинейных уравнений. Однако в связи с тем, что перепад температуры между экраном и стенками вакуумной камеры незначителен, то используется лучистый коэффициент теплоотдачи.

Процессы теплопереноса, протекающие в термостатируемом экране, описываются системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_p G(T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}}) - \alpha_{\kappa} S_{\text{вн}} (T_{\text{э}} - \bar{T}_{\text{э}}) = 0 \\ C_{p\text{э}} m_{\text{э}} \frac{dT_{\text{э}}}{dt} - \alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}} (T_{\text{ср}} - T_{\text{э}}) + \alpha_{\kappa} S_{\text{вн}} (T_{\text{э}} - \bar{T}_{\text{э}}) = 0 \\ \bar{T}_{\text{э}} = \frac{T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}}}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Где C_p и $C_{p\text{э}}$ - удельные теплоемкости газа и теплообменника;

G - расход газа;

$T_{\text{вых}}$ и $T_{\text{вх}}$ - средние значения температуры газа на входе и выходе теплообменника;

$T_{\text{ср}}$ и $T_{\text{э}}$ - средние значения температуры среды и теплообменника;

$S_{\text{вн}}$ и $S_{\text{нар}}$ - внутренняя и наружная площади теплообменника.

$m_{\text{э}}$ - масса теплообменника;

t - время;

α_{κ} и $\alpha_{\text{л}}$ - коэффициенты теплоотдачи конвекцией и излучением соответственно;

Запишем систему уравнений (1) в операторной форме заменив $p = \frac{d}{dt}$

$$\begin{cases} C_p G(T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}}) - \alpha_{\kappa} S_{\text{вн}} (T_{\text{э}} - \bar{T}_{\text{э}}) = 0 \\ C_{p\text{э}} m_{\text{э}} p T_{\text{э}} - \alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}} (T_{\text{ср}} - T_{\text{э}}) + \alpha_{\kappa} S_{\text{вн}} (T_{\text{э}} - \bar{T}_{\text{э}}) = 0 \\ \bar{T}_{\text{э}} = \frac{T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Выделим из первого уравнения системы (2)

$$\alpha_{\kappa} S_{\text{вн}} (T_{\text{э}} - \bar{T}_{\text{э}}) = C_p G(T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}}) \quad (3)$$

И подставим во второе уравнение системы (2)

$$C_{p\text{э}} m_{\text{э}} p T_{\text{э}} - \alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}} (T_{\text{ср}} - T_{\text{э}}) + C_p G(T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}}) = 0 \quad (4)$$

Поделим обе части уравнения (4) на $\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}$:

$$\frac{C_{p\text{э}} m_{\text{э}}}{\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}} p T_{\text{э}} - T_{\text{ср}} + T_{\text{э}} + \frac{C_p (T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}})}{\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}} G = 0 \quad (5)$$

Представим что:

$$\frac{C_{p\text{э}} m_{\text{э}}}{\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}} = a_1; \quad \frac{C_p (T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}})}{\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}} = a_2 \quad (6)$$

Тогда получим уравнение:

$$a_1 p T_{\text{э}} - T_{\text{ср}} + T_{\text{э}} + a_2 G = 0 \quad (7)$$

Перенесем часть уравнения не содержащее $T_{\text{э}}$ в правую сторону

$$a_1 p T_{\text{э}} + T_{\text{э}} = T_{\text{ср}} - a_2 G \quad (8)$$

Произведем преобразование Лапласа

$$T_{\text{э}}(a_1 p + 1) = T_{\text{ср}} - a_2 G \quad (9)$$

$$T_{\text{э}} = \frac{T_{\text{ср}} - a_2 G}{a_1 p + 1} \quad (10)$$

$$T_{\text{э}} = \frac{1}{a_1 p + 1} T_{\text{ср}} - \frac{a_2}{a_1 p + 1} G \quad (11)$$

Как видно из уравнения (11) выходное состояние зависит от двух апериодических звеньев первого порядка:

$$W_{oc}(p) = \frac{1}{a_1 p + 1} \quad \text{и} \quad W_z(p) = -\frac{a_2}{a_1 p + 1} \quad (12)$$

W_{oc} – передаточная функция воздействия излучения окружающей среды.

W_z – передаточная функция расхода газа.

Рис. 1. Структурная схема объекта управления

Рассчитаем коэффициенты a_1 и a_2 :

$$a_1 = \frac{C_{\text{рз}} m_{\text{э}}}{\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}}; \quad a_2 = \frac{C_{\text{р}} (T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}})}{\alpha_{\text{л}} S_{\text{нар}}} \quad \alpha_{\text{л}} = \frac{\delta_0 \varepsilon_{\text{нр}} \psi (T_{\text{ср}}^4 - T_{\text{э}}^4)}{T_{\text{ср}} - T_{\text{э}}}$$

Из формулы коэффициента лучистого теплообмена видно, что коэффициент не линейный, поэтому при моделировании, мы будем возьмем средние значение коэффициента лучистого теплообмена за все время эксперимента.

Возьмем $\alpha_{\text{л}}$ для $T_{\text{ср}}=295\text{K}$ и для $T_{\text{э}}=263\text{K}$

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.81 \cdot 1 (295^4 - 263^4)}{295 - 263} = \frac{5.4 \cdot 10^{-8} \cdot 2789000064}{32} = 4,7$$

Возьмем $\alpha_{\text{л}}$ для $T_{\text{ср}}=295\text{K}$ и для $T_{\text{э}}=273\text{K}$

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.81 \cdot 1 (295^4 - 273^4)}{295 - 273} = \frac{5.4 \cdot 10^{-8} \cdot 2789000064}{22} = 4,95$$

Возьмем α_L для $T_{cp}=295K$ и для $T_{э}=283K$

$$\alpha_L = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.81 \cdot 1(295^4 - 283^4)}{295 - 263} = \frac{5.4 \cdot 10^{-8} \cdot 2789000064}{12} = 5.21$$

Как видно из вычислений α_L не сильно меняется в измеряемом диапазоне температур. В дальнейшем для упрощения вычислений будем принимать $\alpha_L = 5$.

$T_{вых}$ и T_{ex} средние значения температуры газа на входе и выходе теплообменника не постоянны, и зависят от расхода газа. В реальной системе они измеряются датчиками. В нашей модели мы будем брать приближенные значения.

m_g - масса экрана в сборе 21.5кг

$$a_1 = \frac{462 \cdot 21.5}{5 \cdot 0.63} = 3153$$

α_1 - постоянна и за время проведения всех экспериментов изменяться не будет

$$a_2 = \frac{1042 \cdot 80}{5 \cdot 0.63} = 26463$$

– зависит от разницы температур входа и выхода газа. В первоначальной модели возьмем

$$T_{ex} = 213K; \quad T_{вых} = 293K \quad (13)$$

Структурная схема изображенная на Рисунке X позволяет промоделировать систему только при нулевых начальных условиях, поэтому при составлении схемы моделирования, объект управления будет разбит на усилители и интеграторы, чтобы можно было задать начальные условия модели.

Рис. 2. Структурная схема объекта управления

Рис. 3. Схема моделирования объекта управления

Промоделируем систему:

Рис. 4. Результат моделирования объекта управления

Как видно из результата моделирования:

Установившееся значение: 0.3°C

Время переходного процесса $\approx 13000\text{c}$

Для того чтобы убедиться в правильности модели проведем эксперимент с помощью автоматизированной системы контроля и управления (глава 4) и сравним результаты моделирования и эксперимента.

Результаты реального эксперимента: Установившееся значение: 2°C

Время переходного процесса $\approx 15000\text{c}$

Рис. 5. Сравнение результатов эксперимента и моделирования

В результате сравнения видно, что в целом модель повторяет реальную систему, но конечный результат отличается от реального $\approx 2K$ и время переходного процесса больше.

Рассчитаем погрешности:

Погрешность установившегося значения:

$$\delta_y = \frac{275K - 273K}{275K} \cdot 100\% \approx 1\% \quad (14)$$

Максимальная погрешность:

$$\delta_m = \frac{279K - 275K}{279K} \cdot 100\% \approx 1,5\% \quad (15)$$

Погрешность времени переходного процесса:

$$\delta_n = \frac{15000 - 13000}{15000} \cdot 100\% \approx 13\% \quad (16)$$

Сравнив входные и выходные значения температуры газа модели, и реальной системы, становится ясно почему установившееся значение модели отличается от реальной.

Что касается времени переходного процесса, то погрешность вызвана линеаризацией $\alpha_l, T_{вых}$ и $T_{вх}$.

В модели мы взяли приблизительные значения температуры газа.

В реальной же системе по показаниям датчиков средняя температура составила:

$$T_{вх} = 215K; \quad T_{вых} = 287K \quad (17)$$

Пересчитаем коэффициент α_2 :

$$a_2 = \frac{1042 \cdot 73}{5 \cdot 0.63} = 24147 \quad (18)$$

Промоделируем, и сравним результаты снова:

Рис. 6. Сравнение результата эксперимента и моделирования с реальными значениями температуры газа

Теперь видно, что установившееся значение модели и реальной системы совпадают. Модель можно использовать для синтеза регулятора

Список используемых источников:

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. Питер: 2005 г. 336 с
2. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977. 344 с

© 2016, Табишев В.И.

Составление математической модели
термостатируемого экрана

© 2016, Tabishev V.I.

Drawing up a mathematical model of a thermostatic
screen