DOI: 10.17117/na.2016.11.02.189

<http://ucom.ru/doc/na.2016.11.02.189.pdf>

Поступила (Received): 02.11.2016

Неснов Д.В. Нормальные конические координаты

Nesnov D.V.
Normal conical coordinates

Большинство физических процессов и явлений моделируются с применением математического аппарата теории поля. Теория поля в научной литературе широко представлена в векторном изложении в прямоугольных декартовых координатах. В статье показано введение нормальных конических координат с последующим применением теории поля в полученных координатах

Ключевые слова: специальные координаты, опорный конус

Most physical processes and phenomena designed with the use of mathematical vehicle of the field theory. The field theory in scientific literature is widely presented in vector exposition in rectangular coordinates. In the article introduction of normal conical coordinates is rotined with subsequent application of the field theory in the got coordinates

Key words: special coordinates, supporting cone

Неснов Дмитрий Валерьевич

Кандидат технических наук, доцент
Самарский государственный технический университет
г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Nesnov Dmitry Valerievich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
Samara state technical university
Samara, Molodogvardeyskaya st., 244

Дифференциальные уравнения выражений характеристик полей состоят из частных производных. Решения таких уравнений могут быть найдены в квадратурах лишь для незначительного количества полей и отдельных задач. В остальных случаях физические процессы моделируют с разными степенями приближения. Благодаря выразительности и наглядности геометрическое моделирование приобрело значение эффективного средства изучения физических полей [1, 2].

Приведем конструктивный способ получения функций

$$x=f(t, u, v), y=\varphi(t, u, v), z=\psi(t, u, v) \quad (1)$$

зависимости прямоугольных декартовых координат x, y, z (глобальной системы) от нормальных конических координат t, u, v (локальной системы).

Возьмем конус вращения с вершиной в начале координат, ось которого совпадает с Oz . Угол наклона образующей к оси Oz равняется α (рис. 1).

Возьмем произвольную точку M , внешнюю относительно конуса. Первая нормальная коническая координата t – это угол между полуплоскостью xOz и полуплоскостью OzM в направлении против движения часовой стрелки, если наблюдать со стороны положительного направления оси Oz .

Рис. 1. Опорный конус нормальных конических координат

Через точку M проведем нормаль MM_k к конусу, который принадлежит полуплоскости zOM , M_k – точка пересечения этой нормали с поверхностью конуса. В нормальной конической координате пространства $u=OM_k$ является второй, а $v=M_kM$ – третьей координатой точки M . Положительные значения v имеют отсчет от точки M_k во внешнюю подобласть конуса, отрицательные – в сторону его внутренней подобласти [3].

Если вращать точку M вокруг Oz , ее локальные координаты u и v не меняются. Принимая это во внимание и на соотношения, сущность которых представлена на рис. 1, получим функции (1)

$$\begin{aligned} x &= OM_x = OM_{xy} \cos t = (OM_{kxy} + M_{kxy}M_{xy}) \cos t, \\ y &= OM_y = OM_{xy} \sin t = (OM_{kxy} + M_{kxy}M_{xy}) \sin t, \\ z &= OM_z = OM_{kz} - M_zM_{kz}. \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановок в выражения (2) $OM_{kxy} = u \sin \alpha$, $M_{kxy} M_{xy} = v \cos \alpha$, $OM_{kz} = u \cos \alpha$, $M_z M_{kz} = v \sin \alpha$, получим

$$\begin{aligned} x &= (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \cos t; \quad y = (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \sin t; \\ z &= u \cdot \cos \alpha - v \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Также конструктивно получим функции (3) зависимости нормальных координат от прямоугольных декартовых:

$$u = OM_k = ON + NM_k = OM_r \cdot \cos \alpha + M_r M \cdot \sin \alpha = z \cdot \cos \alpha + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \alpha;$$

$$v = PM - PM_k = MM_z \cos \alpha - OM_z \sin \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha.$$

Поскольку t – параметр полуплоскости, а не плоскости, для обеспечения однозначности и для предотвращения деления на ноль в компьютерных расчетах определим координату t на интервале $0 \leq t \leq 2\pi$, и добавим выше полученные выражения для u и v .

$$t = \frac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y > 0;$$

$$t = \frac{3\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y < 0;$$

$$t = \arctg \frac{y}{x}, \text{ если } x > 0, y > 0;$$

$$t = \arctg \frac{y}{x} + \pi, \text{ если } x < 0;$$

$$t = \arctg \frac{y}{x} + 2\pi, \text{ если } x > 0, y < 0;$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha; \quad (4)$$

$$v = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha.$$

Условие (2) возможности однозначного решения уравнений (3) относительно t, u, v и уравнений (4) относительно x, y, z

$$\frac{D(x, y, z)}{D(t, u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = u \sin \alpha + v \sin \alpha \neq 0$$

где частные производные берут для функций (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -(u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \sin t, & \frac{\partial y}{\partial t} &= (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \cos t, & \frac{\partial z}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \sin \alpha \cdot \cos t, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \sin \alpha \cdot \sin t, & \frac{\partial z}{\partial u} &= \cos \alpha, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \cos \alpha \cdot \cos t, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \cos \alpha \cdot \sin t, & \frac{\partial z}{\partial v} &= -\sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Те точки, в которых выражение якобиана (5) равняется нулю,

$$u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

составляют область пространства, координация которой нормальными коническими координатами не возможна. Определим v из (7)

$$v = -u \operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

Уравнению (8) отвечает ось конуса, которая совпадает с осью Oz .

Таким образом, исключенными точками нормальной конической координации пространства являются точки, которые принадлежат оси конуса.

Координатные поверхности нормальной конической системы:

$t = \text{const}$ – полуплоскость, которая проходит через ось конуса;

$u = \text{const}$ – коническая поверхность, соосная с опорным конусом, образующие которой перпендикулярны образующим опорного конуса;

$v = \text{const}$ – коническая поверхность, соосная с опорным конусом, образующие которой параллельны образующим опорного конуса.

Координатные линии нормальной конической системы:

t – линия – окружность пересечения конусов $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$;

u – линия – прямая пересечения полуплоскости $t = \text{const}$ и конуса $v = \text{const}$;

v – линия – прямая пересечения полуплоскости $t = \text{const}$ и конуса $u = \text{const}$.

В теории поля применяют подвижной триэдр, орт которого имеет направление роста координат локальной системы отнесения.

Рис. 2. Подвижный триэдр

На рисунке 2 показано триэдр, орты которого e_t , e_u и e_v построены в точке M . С целью предотвращения всевозможных особенностей и связанных с ними недоразумений будем рассматривать только правые системы как глобальных, так и локальных координат.

Список используемых источников:

1. Альпин Л.М. Теория поля. М.: Недра, 1966, 348 с
2. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. М.: Физматиздат, 1962, 132 с.
3. Неснов Д.В. Геометрическое моделирование полей в нормальных конических и нормальных тороидальных координатах. Автореферат диссертации. Донецк, 2004. 20 с.