DOI: 10.17117/na.2016.11.02.186

<http://ucom.ru/doc/na.2016.11.02.186.pdf>

Поступила (Received): 02.11.2016

Неснов Д.В. Конгруэнция винтовых линий в нормальных конических координатах

Nesnov D.V.
Congruence helix in a normal conical coordinates

Одними из наиболее распространенных в технике являются винтовые поверхности образуются винтовым движением представленной образующей линии. Такие поверхности можно получить путем изъятия из конгруэнции, цилиндрических винтовых линий, имеющих общую ось и постоянный шаг

Ключевые слова: конгруэнция, опорный цилиндр, специальная система координат

One of the most common techniques are the spiral surface is formed a helical movement represented by forms lines. Such a surface can be obtained by removing some of congruence, a cylindrical helix having a common axis and constant pitch

Key words: congruence, the reference cylinder, the special coordinate system

Неснов Дмитрий Валерьевич

Кандидат технических наук, доцент
Самарский государственный технический
университет
г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Nesnov Dmitry Valerievich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
Samara state technical university
Samara, Molodogvardeyskaya st., 244

Нормальная пространственная система цилиндрических координат в классическом виде определяется функциями:

$$x = (a + v) \cos t, \quad y = (a + v) \sin t, \quad z = u, \quad (1)$$

где: t – угол между плоскостью xOz и плоскостью расположения текущей точки;

u – расстояние между плоскостью xOy и текущей точкой на поверхности цилиндра;

v – расстояние от текущей поверхности цилиндра до точки пространства вдоль нормали;

a – радиус опорного цилиндра.

Заметим, что координаты $\rho = a + v$ и t образуют полярную систему на плоскости xOy (при $u = \text{const}$), а координаты ρ и u – прямоугольную систему декартовых координат на плоскости пучка с осью Oz (при $t = \text{const}$) [1].

Координатные поверхности системы: $t = \text{const}$ и $u = \text{const}$ – плоскости, соответственно проходят через ось цилиндра (Oz) и перпендикулярные к ней, $v = \text{const}$ – цилиндры, соосные с опорным.

Координатные линии: конгруэнция t – линий, состоит из окружностей, которые имеют центры на оси цилиндра и пересекаются с плоскостями, перпендикулярными к нему, конгруэнция u – линий, образуется прямыми, которые параллельны оси цилиндра и конгруэнция v – линий, образована нормальными опорного цилиндра.

Изменим нормальную координату пространства (1) за счет новой конгруэнции координатных линий [2]. Это можно сделать, заменив одну из двух семей координатных линий на опорном цилиндре на семью винтовых линий. Рассмотрим последовательно оба возможных случая.

В первом случае координатная сетка на опорном цилиндре будет состоять из прямолинейных образующих и семьи винтовых линий, пересекающих их под постоянным углом – β . Для этого заменим параметр u с помощью непрерывной дифференцированной функции двух переменных

$$u = u(t, w), \quad (2)$$

где: w – параметр семьи линий винтовых линий на поверхности – определителе.

Выражение функций (2) получим, воспользовавшись уравнением для нахождения угла между двумя направлениями на поверхности [1]:

$$\cos \varphi = \frac{Edu\partial u + F(du\partial u + dt\partial t) + Gdt\partial t}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\partial t + Gdt^2} \sqrt{E\partial u^2 + 2F\partial u\partial t + G\partial t^2}}, \quad (3)$$

где: $E = 1, F = 0, G = a^2$ – коэффициенты первой квадратичной формы опорного цилиндра. Прямолинейные образующие цилиндра определяются направлением $\partial u = 1, \partial t = 0$. С учетом этого и значений коэффициентов E, F и G уравнение (3) примет вид

$$\cos \beta = \frac{du}{\sqrt{du^2 + a^2 dt^2}}.$$

Разделив переменные в последнем уравнении получим

$$du = \pm a \operatorname{ctg} \beta dt. \quad (4)$$

Решение этого уравнения дает выражение функции (2)

$$u = \pm a \operatorname{ctg} \beta t + w. \quad (5)$$

При этом положительному значению двойного знака в выражении (5) соответствует правое направление винтовой линии, а отрицательному – левое. Подставляя выражение из правой части (5) в (1) вместо u получим

$$x = (a + v) \cos t, y = (a + v) \sin t, z = \pm a \operatorname{ctg} \beta t + w \quad (6)$$

– уравнения, определяющие представление новой нормальной цилиндрической координаты пространства. В этой координате изменена семья плоскостей $u = \text{const}$ на семью прямых геликоидов ($w = \text{const}$), которая образуется нормальными опорного цилиндра вдоль винтовых линий. Конгруэнцию t – линий в новой координате пространства образуют пары поверхностей $w = \text{const}$ и $v = \text{const}$, которые определяют множество винтовых линий, имеющих в соответствии с (6) постоянный шаг $b = a \operatorname{ctg} \beta$. Внутренние уравнения поверхности новой конгруэнции координатных линий получим, связав параметры w и v с помощью непрерывной дифференцируемой функции

$$v = v(w), t = t, \text{ или } w = w(v), t = t \quad (7)$$

Подставляя правую часть уравнений (7) в (6) получим параметрические уравнения поверхности конгруэнции. При этом заметим, что поскольку каждому значению параметра t в (6) соответствует плоскость пучка с осью Oz , функции определяют некоторую плоскую линию, которая лежит в этой плоскости.

Во втором случае, координатную сетку на цилиндре составят семья окружностей с центрами на оси цилиндра, принадлежащая плоскостям ортогональным к ней, и семья винтовых линий, которые образуют постоянный угол с этими плоскостями.

Запишем уравнение (4) относительно dt , учитывая значение γ

$$dt = \pm \frac{du}{a \operatorname{tg} \gamma}$$

Его решение

$$t = \pm \frac{u}{a \operatorname{tg} \gamma} + w. \quad (8)$$

Подставляя правую часть (8) вместо t в (1) получим

$$x = (a + v) \cos\left(\pm \frac{u}{a \operatorname{tg} \gamma} + w\right), y = (a + v) \sin\left(\pm \frac{u}{a \operatorname{tg} \gamma} + w\right), z = u. \quad (9)$$

В отличие от первого случая, во втором случае параметризации опорного цилиндра соответствует семья плоскостей $u = \text{const}$, а семье $w = \text{const}$ соответствует однопараметрическое множество соосных прямых геликоидов. Конгруэнцию винтовых линий в этом случае образуют u – линии. Внутренние уравнения поверхности конгруэнции винтовых линий во втором случае определяют функции

$$v = v(w), u = u, \text{ или } w = w(v), u = u. \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что координатную сетку на поверхности конгруэнции будут составлять, кроме винтовых линий, плоские линии, которые находятся в плоскостях перпендикулярных оси опорного цилиндра и соответствуют текущему значению параметра u .

Предварительные результаты указывают на возможность ассоциирования с функциями (6) и (10) погружением в конгруэнцию винтовых некоторой плоской линии. Эта линия будет совершать винтовое движение в направлении оси опорного цилиндра и находиться: в случае координации (6) – в плоскости, проходящей через ось цилиндра; в случае координации (10) – в плоскости, ортогональной к указанной оси.

Список используемых источников:

1. Норден А. П. Дифференциальная геометрия. М.: Учпедгиз, 1948. 245 с.
2. Коломец Е. А. Математические и компьютерные модели поверхностей в специальных нормальных координатах. Автореферат диссертации. Донецк, 2000. 18 с.