DOI: 10.17117/na.2016.10.03.383

<http://ucom.ru/doc/na.2016.10.03.383.pdf>

Поступила (Received): 01.10.2016

Куцепалова Е.С.
Изометрии гиперболической плоскости и
их геометрии

Kutsepalova E.S.
Isometry of the hyperbolic plane and geometry

Мы рассмотрели теорию с разных сторон: движения и связи между гиперболическими фигурами и их конструкциями с использованием евклидовых инструментов, отражения и фуксовы группы, симметрии в гиперболических треугольных группах. Для изучения некоторых аспектов этих теорий мы прибегнули к изучению как российских и советских, так и международных иностранных статей, монографий и отдельных пособий

Ключевые слова: изометрии, группы, симметрии, треугольные группы, гиперболическая плоскость

We have considered the theory from all sides: movement and connection between the hyperbolic shapes and their constructions using Euclidean tools, reflection and Fuchsian groups, hyperbolic symmetry in triangular groups. To explore some aspects of these theories we applied to the study of Russian and Soviet and to international foreign articles, monographs and individual benefits

Key words: isometry, group, symmetry, triangle group, a hyperbolic plane

Куцепалова Екатерина Сергеевна

Студентка

Кубанский государственный университет

г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Kutsepalova Ekaterina Sergeevna

Student

Kuban state university

Krasnodar, Stavropolskay st., 149

В работе рассматривается широкий класс групп, заданных образующими и соотношениями, так называемые треугольные группы.

Интерес к ним обусловлен прежде всего, что они играют большую роль в геометриях:

Евклидовой, сферической, и особенно, гиперболической, в теории автоморфных функций, в топологии многообразий и т.д.

Эти группы возникают как группы, порожденные отражениями (симметриями) относительно сторон треугольника с заданными углами, построенными в соответствующих геометриях. Поскольку на плоскости и сфере не так много таких групп, то основным поставщиком этих групп является гиперболическая плоскость.

Поэтому, первым этапом в работе была разработка и реализация алгоритма построения гиперболических треугольников с заданными углами.

Вторым этапом – разработка и реализация алгоритма построения симметрий относительно сторон построенного треугольника. Причем все это реализовано на модели гиперболической плоскости в единичном круге.

Третьим этапом в работе была геометрическая реализация слов в групповом алфавите, отношение эквивалентности, сокращения, тождества.

На основе рассмотренных данных мы попробовали создать модель движений и симметрий гиперболического треугольника с помощью написания программы в Wolfram Mathematica 10.0. Эта программа с заданным изначально треугольником в гиперболической плоскости строит свои отображения (движения), получая диэдры и многоугольники, которые образуют подгруппы и их дополнения треугольных групп относительно сторон.

Рассмотрим на плоскости Лобачевского [2, стр.84] треугольник S с углами $\pi/2, \pi/8, \pi/8$, и через T обозначим группу, порожденную отражениями r_1, r_2, r_3 относительно сторон этого треугольника.

С помощью небольшого алгоритма задаем координаты гиперболического треугольника.

Рисуем треугольник, используя образ и прообраз, задавая углы гиперболического треугольника, это является выходом

В гиперболической плоскости дуги- прямые, перпендикулярные радиусом. Попробуем графически показать, что симметрия не сохраняет ориентацию. Выведем треугольник с углами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$ и другой треугольник с углами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}$ [1, стр.149].

Симметрично отобразив каждую из сторон, мы имеем фигуры такого вида.

Вычисляем гиперболические симметрии относительно прямой

Задаем функции, с помощью которых происходит движение гиперболического треугольника. Эти отражения, порождают подгруппу диэдров D_7 и D_8 , в зависимости от угла, оставляющую точку центра на месте. Треугольники, полученные из треугольника S с помощью движений из группы диэдра, заполняют правильный восьмиугольник (семиугольник) – показано на рисунке 1а и рисунке 1б

Рис. 1а. Диэдр D_7

Рис. 1б. Диэдр D_8

Строим дополнения гиперболического треугольника и его симметрии относительно других сторон – рисунок 2а и рисунок 2б

Рис. 2а. Симметрии от дополнений

Рис. 2б. Симметрии от дополнений

Подгруппы и их дополнения относительно сторон, построенные путем отображения одной из сторон гиперболического треугольника.

Аналогично определяются другие движения группы.

Список используемых источников:

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп // Наука. 1984. С. 130-185.
2. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах // Наука. 1989. С. 39-102.

© 2016, Куцепалова Е.С.

Изометрии гиперболической плоскости и их геометрии

© 2016, Kutsepalova E.S.

Isometry of the hyperbolic plane and geometry