DOI: 10.17117/na.2016.10.03.198

Поступила (Received): 02.10.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.10.03.198.pdf>**Локшина Л.Я., Костандов Ю.А.****Влияние внешнего и внутреннего трения на параметры предельного состояния образца трапецевидной формы из хрупкого материала при сжатии****Lokshina L.Ya., Kostandov Yu.A.****Influence of external and internal friction on limiting state parameters of trapezoidal specimen of brittle material at compression**

Получены уравнения для вычисления предельного напряжения в трапецевидных образцах из хрупких материалов при одноосном сжатии с учетом контактного трения на поверхности приложения нагрузки и внутреннего трения материала образцов. Установлена связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона касательных к траекториям максимальных эффективных касательных напряжений, получены формулы для определения углов их поворота за счет действия контактного касательного напряжения

Ключевые слова: трапецевидный образец, напряжение, контактное трение, внутреннее трение, разрушение

Локшина Людмила Яковлевна

Научный сотрудник

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

Крым, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4

Костандов Юрий Аршавирович

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

Крым, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4

The equations for calculating limiting stress in trapezoidal specimens of brittle materials under uniaxial compression, taking into account the friction on the surface of load application and internal friction of the material specimen are received. The correlation between normal and tangential stresses through the inclination angles of tangents to the trajectories of maximum effective tangential stresses was set. The formulas for determining the angles of their rotation of due to the action of the contact tangential stress are received

Key words: trapezoidal specimen, stress, external friction, internal friction, fracture

Lokshina Lyudmila Yakovlevna

Researcher

Crimean federal university named V.I. Vernadsky
Crimea, Simferopol, Vernadskogo ave., 4**Kostandov Yuriy Arshavirovich**

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Senior Researcher, Leading Researcher

Crimean federal university named V.I. Vernadsky
Crimea, Simferopol, Vernadskogo ave., 4

Предел прочности горных пород и строительных материалов при одноосном сжатии является одним из основных параметров оценки напряжённо-деформированного состояния горных массивов и строительных конструкций и их

В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние образца трапецевидной формы из хрупкого материала при одноосном сжатии между плитами пресса с учетом внутреннего трения материала и контактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [4]. Под понятием эффективного касательного напряжения τ_{ef} понимается активное касательное напряжение τ_α за вычетом фрикционной составляющей. Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

где τ_{ef} – эффективное касательное напряжение на ТМЭКН, τ_{α} – активное касательное напряжение на ТМЭКН, μ – коэффициент внутреннего трения материала, σ_{α} – нормальное напряжение на ТМЭКН, k – предельная сопротивляемость материала сдвигу.

Рис. 1

Полагаем, что на контактных поверхностях распределение нормального напряжения σ_{y_i} и контактные касательные напряжения τ_k являются постоянными. Это позволяет оценить влияние трапецевидной формы образца на его характер разрушения и прочность по сравнению с результатами для прямоугольного образца.

Расположим начало системы координат посередине верхней контактной поверхности образца. Примем следующее распределение нормальных напряжений $\sigma_{y_i}^e$ на верхней контактной поверхности:

$$\sigma_{y_i}^e = \sigma_{y_0},$$

где σ_{y_0} – нормальное напряжение на верхней контактной поверхности.

Распределение нормальных напряжений $\sigma_{y_i}^n$ на нижней контактной поверхности образца при $y = h$, с учётом увеличения ширины образца, имеет вид:

$$\sigma_{y_i}^n = \sigma_{y_0} \left(1 - \frac{L_n}{1 + L_n} \right),$$

где $L_n = 2 \frac{h}{l} \operatorname{tg} \omega$, ω – угол между нормалью и боковой гранью образца, определяющий различие размеров верхней и нижней контактных поверхностей.

Распределение касательных напряжений τ_k на верхней и нижней контактных поверхностях:

$$\tau_k^e = f \sigma_{y_0}^e, \quad \tau_k^n = f \sigma_{y_i}^n,$$

где f – коэффициент контактного трения.

Из равновесия треугольников aes и $be's'$, формируемых ТМЭКН ab и горизонтальными поверхностями образца Найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси ОХ касательных к ТМЭКН ae и be' соответственно.

Силы, приложенные к верхнему треугольнику aes и нижнему треугольнику $be's'$ спроецируем на площадку на ТМЭКН, и нормаль к ней. В результате суммирования проекций сил и ряда математических преобразований с учетом закона Кулона (1) для верхнего треугольника aes получим:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha). \quad (2)$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника $be's'$:

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma). \quad (3)$$

Каждое из уравнений (2) и (3) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Их решение сводится к интегрированию на ТМЭКН между точками a и b . В результате интегрирования получим:

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha) \Big|_a^b = -2\mu\alpha \Big|_a^b.$$

Из практических наблюдений известно, что в ряде случаев разрушение образца начинается из угла. Поэтому для этих случаев можно полагать, что условие разрушения материала $\tau_{ef} = k$ выполняется в точке a и достигается в треугольнике aes раньше, чем в треугольнике $be's'$. Следовательно,

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha)$$

или

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = \exp 2\mu(\alpha - \gamma). \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) необходимо найти углы α и γ наклона касательных к ТМЭКН в точках a и b соответственно, напряжения σ_α и σ_γ .

По методике опубликованной в [3] найдем указанные величины и получим уравнение для определения эффективного касательного напряжения τ_{ef} на ТМКЭН ab :

$$b^2 [I^2 + (\tau_k^n \sin \rho)^2] - 2\tau_k^n bI + \tau_k^{n^2} \cos^2 \rho = 0, \quad (5)$$

где ρ – угол внутреннего трения, $\mu = \operatorname{tg} \rho$, $b = \frac{\tau_k^n}{\tau_{ef} + \mu\sigma_y^n}$,

$$I = (k + \sin \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^{e^2}}) \exp[2\mu(\arctg \theta - \arctg \beta)],$$

$$\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \beta, \quad \gamma = \pi/4 + \rho/2 - \theta, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg \frac{\tau_k^e \cos \rho}{k \sin \rho - \sqrt{k^2 - \tau_k^{e^2}}}, \quad (6)$$

$$\sigma_y^n = \left(2k\mu - \frac{2}{\cos \rho} \sqrt{k^2 - \tau_k^{e^2}} \right) \left(1 - \frac{L_n}{1 + L_n} \right). \quad (7)$$

Уравнение (5) решается численным методом для каждой конкретной задачи с учетом условия $b^2 < \cos^2 \rho$. При этом значения ρ , μ и k определяются из таблиц свойств материалов, а значения β и σ_y^n – из выражений (6) и (7) соответственно. Определив b находим величины τ_{ef} и θ , знание которых позволяет полностью определить вид ТМКЭН и углы наклона касательных к ней в точках a и b .

Рассмотрим равновесие двух треугольников cnq и $dn'q'$, формируемых ТМЭКН cd и горизонтальными поверхностями образца.

Найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона φ и ψ к оси ОХ касательных к ТМЭКН cn и dn' соответственно.

Силы, приложенные к нижнему треугольнику cnq и верхнему треугольнику $dn'q'$, спроецируем на площадку на ТМЭКН, и нормаль к ней. В результате суммирования проекций сил и ряда математических преобразований, аналогичных преобразованиям для треугольников образованных ТМЭКН abi касательными к ней, получим уравнение состояния материала на ТМЭКН для нижнего треугольника cnq :

$$\frac{d\sigma_{\varphi}}{d\varphi} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\varphi}).$$

Действуя по аналогии, получим уравнение состояния материала на ТМЭКН для верхнего треугольника $dn'q'$:

$$\frac{d\sigma_{\psi}}{d\psi} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\psi}).$$

По аналогии с траекторией ab в результате интегрирования и учитывая, что условие разрушения материала $\tau_{ef} = k$ выполняется в точке c и достигается в треугольнике cnq раньше, чем в треугольнике $dn'q'$, получим:

$$\frac{(k + \mu\sigma_{\varphi})}{(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\psi})} = \exp 2\mu(\psi - \varphi) \quad (8)$$

Для решения уравнения (8) необходимо найти углы φ и ψ наклона касательных к ТМЭКН в точках c и d соответственно, напряжения σ_{φ} и σ_{ψ} .

По методике, опубликованной в [3] найдем указанные величины и получим уравнение для определения τ_{ef} на ТМКЭН cd :

$$b^2 \left[I^2 + (\tau_k^e \sin \rho)^2 \right] - 2\tau_k^e bI + \tau_k^{e^2} \cos^2 \rho = 0. \quad (9)$$

$$\text{где } I = (k + \sin \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^{n^2}}) \exp 2\mu \left(-\frac{1}{2} \arctg \phi - \frac{1}{2} \arctg \zeta \right),$$

$$\frac{\tau_k^e}{\tau_{ef} + \mu\sigma_{y_d}} = b, \quad \psi = \pi/4 + \rho/2 - \zeta, \quad \varphi = \pi/4 + \rho/2 - \phi,$$

$$\phi = -\frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\tau_k^n \cos \rho (1 + L_n)}{\sin \rho - \sqrt{k^2 - \tau_k^{n^2}}} \right), \quad (10)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \arctg \frac{b \cos \rho}{\sqrt{1 - b^2 - \sin \rho}},$$

$$\sigma_y^e = 2k\mu - \frac{2}{\cos \rho} \sqrt{k^2 - \tau_k^{e^2}}. \quad (11)$$

Уравнение (9) решается численным методом с учетом условия $b^2 < \cos^2 \rho$ для каждой конкретной задачи. При этом значения ρ , μ и k определяются из таблиц свойств материалов, а значения ϕ и σ_y^e – из выражений (10) и (11) соответственно. Определив b , находим величины τ_{ef} и ζ , знание которых позволяет полностью определить вид ТМКЭН и углы наклона касательных к ней в точках c и d .

В результате численного решения уравнений (5) и (9) для трапецевидных образцов из песчанно-цементного материала (ПЦМ) с коэффициентом внутреннего трения $\mu = 0,29$, углом внутреннего трения $\rho = 16^\circ$ и соотношением

$\frac{\tau_k^e}{k} = 0,885$ и $\frac{\tau_k^n}{k} = 0,447$ найдено предельное напряжение в образце, получены углы наклона касательных к ТМЭКН в точках a , b , c и d .

Зависимости углов наклона α и φ касательных к ТМКЭН ab и cd от касательного напряжения τ_k^e на поверхности приложения нагрузки для трапецевидного образца из ПЦМ приведены на рис.2. Из приведенных зависимостей следует, что при росте касательного напряжения τ_k^e на верхнем основании трапецевидного образца угол наклона α увеличивается, а угол наклона φ уменьшается. Это означает, что с ростом τ_k^e размер откалывающегося фрагмента образца уменьшается.

Рис. 2. Зависимости углов наклона α и φ касательных к ТМКЭН ab и cd от касательного напряжения τ_k на поверхности приложения нагрузки для трапецевидного образца из ПЦМ

Установлено, что разрушение образца начинается из точки a , т.к. напряжение в ней раньше достигает предельного значения, чем в точках b , c и d . Откалывающиеся фрагменты образца имеют форму, близкую к треугольной, так как $\alpha = 87^\circ$, а $\varphi = 11^\circ$, следовательно, траектория разрушения в образце практически совпадает с перпендикуляром, опущенным из точки a на нижнее основание трапеции, в результате чего трапецевидный образец приобретает практически прямоугольную форму. Как видно из рис.3, это хорошо согласуется с результатами проведенных экспериментов для трапецевидных образцов из ПЦМ с размерами $l = 49$ мм, $h = 44$ мм и $\omega = 30^\circ$.

Рис. 3. Фотография разрушенного между плитами пресса образца из ПЦМ

Из видеозаписи нагружения образца следует, что разрушение образца начинается из точки *a*. Кроме того, установлено, что прочность трапецевидного образца, рассчитанная по площади верхнего основания, по сравнению с прочностью прямоугольного образца с тем же основанием увеличилась почти в два раза.

Список используемых источников:

1. Локшина Л.Я. Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика. Днепрпетровск: ИГТМ НАНУ, 2009. Вып. 82. С. 199-206.
2. Костандов Ю.А., Локшина Л.Я. Влияние контактного трения на предельное напряжение в образце горной породы и вид траектории разрушения при сжатии // Физико-технические проблемы горного производства. Донецк: Институт физики горных процессов НАН Украины, 2010. Вып.13. С.42-47.
3. Костандов Ю.А., Локшина Л.Я. Влияние внешнего и внутреннего трения на параметры предельного состояния образца горной породы при сжатии // Физико-технические проблемы горного производства. Донецк: Институт физики горных процессов НАН Украины, 2011. Вып.14. С. 33-41.
4. Васильев Л.М., Васильев Д.Л. Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями // Геотехническая механика. Днепрпетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. Вып. 42. С. 73-80.

© 2016, Локшина Л.Я., Костандов Ю.А.
Влияние внешнего и внутреннего трения на
параметры предельного состояния образца
трапецевидной формы из хрупкого материала при
сжатии

© 2016, Lokshina L.Ya., Kostandov Yu.A.
Influence of external and internal friction on limiting
state parameters of trapezoidal specimen of brittle
material at compression