DOI: 10.17117/na.2016.10.03.048

Поступила (Received): 24.10.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.10.03.048.pdf>**Боженюк А.В.****Оценка изоморфизма нечетких темпоральных графов
на основе нечетких внутренне устойчивых множеств****Bozhenyuk A.V.****Isomorphism evaluation of fuzzy temporal graphs
based on fuzzy internally stable sets**

В данной работе рассматриваются вопросы оценки изоморфизма нечетких темпоральных графов, то есть графов, в которых степень связности вершин изменяется в дискретном времени. Рассмотрено свойство, устанавливающее взаимосвязь между степенью изоморфизма нечетких темпоральных графов и их нечеткими инвариантами – нечеткими множествами внутренней устойчивости

Ключевые слова: нечеткий темпоральный граф, степень изоморфизма

This paper discusses the issues estimation isomorphism of fuzzy temporal graphs, i.e. graphs, in which incidence of graph vertices is changed in the discrete time. Considered a property that establishes the relationship between the degree of isomorphism of fuzzy temporal graphs and fuzzy invariants – fuzzy sets of internal stability

Key words: fuzzy temporal graph, isomorphism degree

Боженюк Александр Витальевич
Доктор технических наук, профессор
Южный федеральный университет
г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44

Bozhenyuk Alexander Vitalievich
Doctor of Technical Sciences, Professor
Southern federal university
Taganrog, Nekrasovsky lane, 44

Теория графов привлекает большое внимание специалистов различных областей знания. Она используется для изучения многих сложных природных явлений. Традиционно теория графов используется для представления отношений между элементами сложных структур различной природы [1,2]. При этом данные отношения между элементами являются постоянными и не меняются во времени. Такие графы в работе [3] были названы «статическими». В случае, когда отношения между элементами некоторой структуры изменяются во времени, традиционные «статические» графы не очень подходят для их описания и моделирования. В связи с этим, является актуальным использование графой модели, в которой связи между элементами (вершинами графа) изменяются во времени, то есть, темпорального графа [4]. В случае, когда в темпоральном графе, связи между вершинами являются нечеткими, приходим к понятию нечеткого темпорального графа [5,6]. Одной из важных проблем теории графов является распознавание изоморфизма или эквивалентности двух графов [7]. В случае нечетких темпоральных графов, понятие изоморфизма является нечетким и зависящим от времени.

Обозначим через $\tilde{G} = (X, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$ темпоральный нечеткий граф [4,6], в котором множество X является множеством вершин графа ($|X|=n$), множество натуральных чисел $t=\{1,2,...,T\}$ определяет дискретное время, а множество $\{\tilde{\Gamma}_t\}$ задает семейство соответствий, которые отображают вершины X в себя в моменты времени $t = \overline{1, T}$.

Введем в рассмотрение нечеткий суграф $\tilde{G}_t = (X, \tilde{U}_t)$, в котором множество вершин X – тоже, что и в исходном темпоральном нечетком графе $\tilde{G} = (X, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$, множество $\tilde{U}_t = \{\mu_t(x_i, x_j) | (x_i, x_j) \in X^2\}$ является нечетким множеством ребер в моменты $t = \overline{1, T}$, а функция μ_t есть функция принадлежности, отображающая множество $X^2 \rightarrow [0,1]$. Рассмотрим его нечеткий подграф $\tilde{G}' = (X', \tilde{U}')$, где $X' \subseteq X, \tilde{U}' \subseteq \tilde{U}_t$. Обозначим через $\tau = \max_{\forall x_i, x_j \in X'} \{\mu_t(x_i, x_j)\}$.

Подмножество вершин X' называется нечетким внутренне устойчивым множеством в момент t со степенью внутренней устойчивости $\alpha(X')=1-\tau$.

Если $X' = X$, то величина $\alpha(X)$ определит степень внутренней устойчивости суграфа $\tilde{G}_t$.

Подмножество вершин $X' \subseteq X$ называется максимальным нечетким внутренне устойчивым множеством в момент времени t со степенью $\alpha(X')$, если для любого $X'' \supset X'$ величина $\alpha(X'') < \alpha(X')$.

Пусть $\tau_k = \{X_{K_1}, X_{K_2}, ..., X_{K_l}\}$ – семейство максимальных нечетких внутренне устойчивых k вершинных множеств в момент времени t со степенями внутренней устойчивости $\alpha_{X_{K_1}}^0, \alpha_{X_{K_2}}^0, ..., \alpha_{X_{K_l}}^0$ соответственно. Обозначим через $\alpha_{X_k}^{\max} = \max\{\alpha_{X_{K_1}}^0, \alpha_{X_{K_2}}^0, ..., \alpha_{X_{K_l}}^0\}$. Если семейство $\tau_k = \emptyset$, то положим $\alpha_{X_k}^{\max} = \alpha_{X_{k-1}}^{\max}$. Величина $\alpha_{X_k}^{\max}$ означает, что в суграфе $\tilde{G}_t$ существует подграф на k вершин со степенью внутренней устойчивости $\alpha_{X_k}^{\max}$ и не существует никакого другого подграфа с k вершинами, чья степень внутренней устойчивости была бы больше величины $\alpha_{X_k}^{\max}$.

Множество $\tilde{A}_t = \{<\alpha_{X_1}^{\max}/1>, <\alpha_{X_2}^{\max}/2>, ..., <\alpha_{X_n}^{\max}/n>\}$ называется нечетким множеством внутренней устойчивости нечеткого суграфа $\tilde{G}_t$.

Множество $\tilde{\Psi} = \bigcap_{t=\overline{1, T}} \tilde{A}_t$ называется нечетким множеством внутренней устойчивости темпорального нечеткого графа $\tilde{G} = (X, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$.

Пусть заданы нечеткие ориентированные графы [8] $\tilde{G}_x = (X, \tilde{U}_x)$ и $\tilde{G}_y = (Y, \tilde{U}_y)$, где X и Y – множества вершин, а $\tilde{U}_x = \{<\mu_x(x_i, x_j)/(x_i, x_j)> | (x_i, x_j) \in X^2\}$, $\tilde{U}_y = \{<\mu_y(y_i, y_j)/(y_i, y_j)> | (y_i, y_j) \in Y^2\}$ – нечеткие множества ребер с функциями принадлежности соответственно, $\mu_x: X^2 \rightarrow [0,1]$ и $\mu_y: Y^2 \rightarrow [0,1]$. Пусть число вершин в этих графах совпадают, т.е. $|X|=|Y|=n$.

В работе [9] рассматривалось понятие нечеткого изоморфизма нечетких графов в виде значения $f = \bigcap_{i=1, n} \bigcap_{j=1, n} (\mu_x(x_i, x_j) \leftrightarrow \mu_y(y_i, y_j))$. Здесь под операцией $\&$

подразумевается операция минимум, а эквивалентность определяется как $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)$, где $\rightarrow$ – операция нечеткой импликации, в частности, определяемая в логике Лукасевича ($a \rightarrow b = \min\{1, 1 - a + b\}$).

В этом смысле совпадение инвариантов является необходимым, но не достаточным условием изоморфизма четких графов. Если инварианты не совпадают, то рассматриваемые графы не являются изоморфными.

При рассмотрении нечетких темпоральных графов их инварианты также являются нечеткими величинами. В связи с этим возникает задача оценки влияния нечетких инвариантов на величину возможного изоморфизма f рассматриваемых нечетких темпоральных графов.

В данной работе устанавливается взаимосвязь между изоморфизмом нечетких графов и их нечеткими множествами внутренней устойчивости.

Рассмотрим теперь некоторое взаимно однозначное соответствие $F: X \rightarrow Y$ между множествами вершин X и Y , в результате которого нечеткие темпоральные графы $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ и $\tilde{G}_Y = (Y, \tilde{U}_Y)$ изоморфны со степенью f . Пусть $\tilde{A}_X = \{\langle \alpha_{x_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \alpha_{x_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \alpha_{x_n}^{\max} / n \rangle\}$ и $\tilde{A}_Y = \{\langle \alpha_{y_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \alpha_{y_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \alpha_{y_n}^{\max} / n \rangle\}$ – нечеткие множества внутренней устойчивости нечетких темпоральных графов $\tilde{G}_X$ и $\tilde{G}_Y$ соответственно, f – степень изоморфизма рассматриваемых графов. Тогда можно доказать следующее неравенство $f \leq \&_{k=1, n} (\alpha_{x_k}^{\max} \leftrightarrow \alpha_{y_k}^{\max})$.

Данное неравенство позволяет по нечетким множествам внутренней устойчивости оценивать возможную степень изоморфизма нечетких темпоральных графов.

Список используемых источников:

1. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
3. Kostakos V. Temporal graphs. In Proc. of Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol.388, Issue 6, Elsevier, 2008, p.1007-1023.
4. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Использование темпоральных графов как моделей сложных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. №4 (105). С.198-203.
5. Берштейн Л.С., Боженюк А.В., Розенберг И.Н. Метод нахождения сильной связности нечетких темпоральных графов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУПС, 2011. №3 (43), – С.15-20.
6. Берштейн Л.С., Беляков С.Л., Боженюк А.В. Использование нечетких темпоральных графов для моделирования в ГИС // Известия ЮФУ. Технические науки. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. №1 (126). С.121-127.
7. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука. 1987. 384с.
8. Боженюк А.В., Гинис Л.А. Об использовании нечетких баз и антибаз при анализе нечетких когнитивных карт // Искусственный интеллект. 2004. № 4. С. 276-285.
9. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. Fuzzy Coloring and Evaluation of the Degree of Isomorphism of Fuzzy Graphs // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2002. Т. 41. № 3. С. 447-453.