DOI: 10.17117/na.2016.09.02.034

<http://ucom.ru/doc/na.2016.09.02.034.pdf>

Поступила (Received): 01.09.2016

Малюкова Е.О., Ткаченко С.Н.
Теоретические оценки сходимости многосеточного
метода с V-циклом со сглаживающими итерациями

Maliukova E.O., Tkachenko S.N.
Theoretical estimates of convergence in V-cycle
multi-grid method with smoothing iteration

В работе рассмотрено применение многосеточного метода к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В качестве конечного варианта метода был выбран многосеточный метод с V-циклом со сглаживающими итерациями. На основе известных теоретических оценок скорости сходимости для данного метода была определена функция, которая задаёт скорость сходимости метода. После исследования функции были получены точные теоретические оценки

Ключевые слова: многосеточный метод, сглаживающие итерации, задача Дирихле

In this paper we presented applied multi-grid method to the solution of Dirichlet problem for Poisson equation. V-cycle multi-grid method with smoothing iteration was used. The function of method convergence rate was applied based on theoretical estimates of convergence rate. New accurate theoretical estimates were obtained

Key words: multi-grid method, smoothing iteration, Dirichlet problem

Малюкова Елена Олеговна

Магистрант

Балтийский федеральный университет
им. И. Канта

г. Калининград, ул. А. Невского, 14

Maliukova Elena Olegovna

Master

Baltic federal university named I. Kant
Kaliningrad, Nevskogo st., 14

Ткаченко Сергей Николаевич

Кандидат технических наук, доцент

Балтийский федеральный университет
им. И. Канта

г. Калининград, ул. А. Невского, 14

Tkachenko Sergey Nikolaevich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Baltic federal university named I. Kant
Kaliningrad, Nevskogo st., 14

Одним из эффективных алгоритмов численных методов решения систем алгебраических уравнений является многосеточный метод [1], основанный на использовании последовательности уменьшающихся сеток и операторов перехода от одной сетки к другой. Он использует несколько уровней дискретизации, и таким образом, решает конфликты между компонентами решения.

Целью данной работы являлось применение многосеточного метода к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В качестве конечного варианта метода был выбран многосеточный метод с V-циклом со сглаживающими итерациями. На основе известных теоретических оценок скорости сходимости [2]

для данного метода была определена функция, которая задаёт скорость сходимости метода. После исследования функции были получены точные теоретические оценки.

Известно, что исследование теоретической оценки скорости сходимости сводится к оценке следующей нормы, где α_l – точность, с которой была решена задача на уровне ниже:

$$\|G_l(I - Q_l + \alpha_l Q_l)G_l^*\| \quad (1)$$

Рассмотрим выражение:

$$I - Q_l + \alpha_l Q_l = \alpha_l I + (1 - \alpha_l)(I - Q_l).$$

Совершенные действия приводят к следующему выражению:

$$\alpha_l G_l I G_l^* + (1 - \alpha_l) G_l (I - Q_l) G_l^*$$

Данное выражение было преобразовано следующим образом:

$$G_l(I - Q_l)G_l^* = \frac{(4\mu^2 t^2)^v \cdot t^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}{\frac{1}{4} - \mu^2 t^2 + t^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}$$

где v – количество сглаживающих итераций. Матрицы G_l и G_l^* представляются в виде следующих произведений:

$$G_l = (I - R)(I - P)$$

$$G_l^* = (I - P)(I - R)$$

Определим значение выражения $(G_l I G_l^*)^v$ при нескольких сглаживающих итерациях v :

$$(G_l I G_l^*)^v = (I - R - P)^{2v} (I - P)$$

В конечном итоге $(G_l I G_l^*)^v$ определяется следующим выражением:

$$(G_l I G_l^*)^v = \frac{1}{2} (4\mu_s^2 t_q^2)^v \begin{pmatrix} 1 + 2\mu_s t_q & 1 + 2\mu_s t_q \\ 1 - 2\mu_s t_q & 1 - 2\mu_s t_q \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы $I - P^{s,q}$ и $I - R^{s,q}$ – ортопроекторы, достаточно рассмотреть след матрицы:

$$\text{tr}((G_l I G_l^*)^v) = (4\mu_s^2 t_q^2)^v$$

Следовательно, исследование нормы (1) сводится к исследованию:

$$\begin{aligned} & \|\alpha_l G_l I G_l^* + (1 - \alpha_l) G_l (I - Q_l) G_l^*\| \\ &= \max_{s,q} (\alpha_l \cdot (4\mu_s^2 t_q^2)^v + (1 - \alpha_l) \frac{(4\mu_s^2 t_q^2)^v \cdot t_q^2 \left(\frac{1}{2} - \mu_s^2\right)^2}{\frac{1}{4} - \mu_s^2 t_q^2 + t_q^2 \left(\frac{1}{2} - \mu_s^2\right)^2}) \\ &\leq \max_{-1/4 \leq \mu \leq 1/2, 0 \leq t \leq 1} (\alpha_l \cdot (4\mu^2 t^2)^v + (1 - \alpha_l) \frac{(4\mu^2 t^2)^v \cdot t^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}{\frac{1}{4} - \mu^2 t^2 + t^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}) \end{aligned}$$

Введем следующее обозначение:

$$f(\mu, t) = \alpha_l \cdot (4\mu^2 t^2)^v + (1 - \alpha_l) \frac{(4\mu^2 t^2)^v \cdot t^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}{\frac{1}{4} - \mu^2 t^2 + t^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2} \quad (2)$$

тогда исследование оценки скорости сходимости сводится к поиску:

$$\max_{-1/4 \leq \mu \leq 1/2, 0 \leq t \leq 1} f(\mu, t)$$

<i>grid</i>	μ_{max}	t_{max}	f_{max}
64:64	0.02712	0.99518	0.02712
128:128	0.46860	0.99880	0.03363
256:256	0.47598	0.99970	0.03814
512:512	0.47936	0.99992	0.04134
1024:1024	0.48290	0.99998	0.04369
2048:2048	0.48510	1	0.04548
4096:4096	0.48683	1	0.04689
8192:8192	0.48818	1	0.04802

Рис. 1. Численное исследование функции $\max_{-1/4 \leq \mu \leq 1/2, 0 \leq t \leq 1} f(\mu, t)$ для $v = 4$

Для теоретической оценки скорости сходимости необходимо исследовать выражение (2) при фиксированном μ :

$$f(z) = \alpha_l \cdot (4\mu^2 z)^v + (1 - \alpha_l) \frac{(4\mu^2 z)^v \cdot z \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}{\frac{1}{4} - \mu^2 z + z \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}, \text{ где } z = t^2$$

Дробно-линейная функция, стоящая в правой части, является возрастающей при росте z , Таким образом, $f(z)$ достигает максимума на концах отрезка. Поскольку $0 \leq t \leq 1$, то t_{max} стремится к единице:

$$t_{max} \approx 1.$$

Учитывая, что $t = 1$ можно преобразовать (2) к следующему виду:

$$f(\mu) = \alpha_l \cdot (4\mu^2)^v + (1 - \alpha_l)(4\mu^2)^v \cdot \left(\frac{1}{2} - \mu\right)$$

Вычисляя производную данной функции, получаем значение стационарной точки:

$$\mu = \frac{v \cdot (1 + \alpha)}{(2v + 1) \cdot (1 - \alpha)}$$

l	α_l	μ_{min_l}	$f_{\mu_{min}}$	μ_{max_l}	$f_{\mu_{max}}$	μ_{st_l}	$f_{\mu_{st}}$
1	0.00000	-0.25000	0.00293	0.16153	0.00004	0.44444	0.02165
2	0.02165	-0.25000	0.00295	0.37209	0.01381	0.46412	0.03128
3	0.03128	-0.24999	0.00296	0.46333	0.03632	0.47315	0.03684
4	0.03684	-0.24994	0.00296	0.49048	0.03945	0.47844	0.04049
5	0.04049	-0.24977	0.00295	0.49760	0.04118	0.48195	0.04308
6	0.04308	-0.24909	0.00288	0.49940	0.04323	0.48446	0.04501
7	0.04501	-0.24636	0.00263	0.49985	0.04505	0.48634	0.04652
8	0.04652	-0.23563	0.00182	0.49996	0.04653	0.48781	0.04772
9	0.04772	-0.19565	0.00039	0.49999	0.04772	0.48899	0.04871
10	0.04871	-0.07143	0.00000	0.50000	0.04871	0.48996	0.04953
11	0.04953	0.16667	0.00006	0.50000	0.04953	0.49077	0.05023

Рис. 2. Теоретическая оценка скорости сходимости MGM для сетки 2048×2048 для $v = 4$

Для того чтобы оценить сходимость многосеточного метода достаточно найти значение $\max \{f(\mu_{\min l}, \alpha_l), f(\mu_{\max l}, \alpha_l), f(\mu_{st}, \alpha_l)\}$ на каждом уровне, где $f(\mu_{st}, \alpha_l)$ – значение функции в найденной стационарной точке и l – номер уровня. И значение максимума при $l = K$ оценивает скорость сходимости. Пример результата теоретических вычислений представлен на рисунке 2.

В данной работе были рассмотрены оценки скорости сходимости многосеточного метода. В работе представлена функция, которая описывает теоретическую скорость сходимости. После её исследования были получены теоретические оценки, которые уточнились с помощью точного вычисления её переменных. Было установлено, что скорость сходимости метода не превосходит определённого значения, связанного со сглаживающими итерациями.

Список используемых источников:

1. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМиМФ. 1961. Т. 1. N5.
2. Белякова О.В., Буздин А.А. Многосеточный метод с полуукрупнением для решения систем с блочно-трехдиагональной матрицей // Методы вычислений. СПбГУ. 2005. №21. С. 5-19.

© 2016, Малюкова Е.О., Ткаченко С.Н.

Теоретические оценки сходимости многосеточного метода с V-циклом со сглаживающими итерациями

© 2016, Maliukova E.O., Tkachenko S.N.

Theoretical estimates of convergence in V-cycle multigrid method with smoothing iteration