DOI: 10.17117/na.2016.08.01.272

<http://ucom.ru/doc/na.2016.08.01.272.pdf>

Поступила (Received): 02.08.2016

Земцова Н.И. Новые гомографические решения в проблеме многих тел

Zemtsova N.I.
A new homographical solutions in many-body problem

Обсуждается существование частных решений ньютоновой проблемы n тел, для $n > 2$. Мы рассматриваем так называемые гомографические решения, которые сохраняют в течение времени углы в конфигурации и пропорциональное подобие. Приведены примеры найденных гомографических решений

Ключевые слова: центральные конфигурации, стационарные решения

Existence of private solutions of a Newtonian n -body problem, for $n > 2$, is discussed. We consider so-called homographical solutions which keep during time angles in configurations and proportional similarity. Examples of the found homographic solutions are given

Key words: central configurations, stationary solutions

Земцова Надежда Ивановна

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
г. Москва, ул. Вавилова, 40

Zemtsova Nadezhda Ivanovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Researcher

Computing centre named A.A. Dorodnicyn
Moscow, Vavilov st., 40

Без преувеличения можно считать, что ньютонова проблема многих тел является самой знаменитой проблемой классической математики, механики и астрономии. Ее формулировка весьма проста.

Пусть в абсолютном трехмерном евклидовом пространстве $O\xi\eta\zeta$ имеется n ($n=1,2,3,\dots$) материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ с известными массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, взаимно притягивающих друг друга по закону тяготения Ньютона. Требуется определить траектории движения указанных материальных точек для произвольных начальных данных (начальных положений и начальных скоростей).

Математической моделью этой задачи является система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений порядка $6n$ вида [1]

$$\begin{cases} m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = m_k \text{grad}_k U, \\ \text{grad}_k U = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} e_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta_k} e_\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta_k} e_\zeta, \\ r_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k), k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

где скалярная функция U представляет собой ньютонов потенциал и имеет вид

$$U = \frac{f}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1, s \neq k}^n \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}}, \quad \Delta_{ks} = \sqrt{(\xi_s - \xi_k)^2 + (\eta_s - \eta_k)^2 + (\zeta_s - \zeta_k)^2}, \quad (2)$$

здесь f – постоянная тяготения, $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ – единичные координатные векторы, расположенные на координатных осях $O\xi, O\eta, O\zeta$.

Систему (1) можно переписать в скалярной форме [1]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi_k}{dt^2} = f \sum_{s=1, s \neq k}^n m_s \frac{\xi_s - \xi_k}{\Delta_{ks}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_k}{dt^2} = f \sum_{s=1, s \neq k}^n m_s \frac{\eta_s - \eta_k}{\Delta_{ks}^3}, \\ \frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} = f \sum_{s=1, s \neq k}^n m_s \frac{\zeta_s - \zeta_k}{\Delta_{ks}^3}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) в аналитической форме возможно только для $n = 1$ или $n = 2$. Начиная с $n = 3$, конструктивное решение этих задач невозможно. Попытки многих выдающихся математиков проинтегрировать систему (3), понимая под этим нахождение общего решения или общего интеграла, оказались неудачными.

Поэтому практически всегда возникает вопрос о существовании частных решений, и в первую очередь решений, которые обладают какой-либо симметрией, сохраняемой в процессе изменения независимой переменной. Среди них важное место занимают так называемые *центральные конфигурации*, сохраняющие для всех значений t соответствующие углы в трехмерном евклидовом пространстве между расстояниями [2]. Решения, сохраняющие с течением времени углы в конфигурации и пропорциональное подобие между взаимными расстояниями, называются *гомографическими решениями* дифференциальных уравнений динамической модели [2]. Такое определение было сначала связано с евклидовым конфигурационным пространством, в котором дифференциальные уравнения динамики описываются уравнениями 2-го порядка, но оно может быть перенесено на любое пространство, определяемое дважды дифференцируемыми преобразованиями.

Среди всех возможных конфигураций особое место в небесной механике занимают центральные конфигурации, отнесенные к «барицентрической» системе евклидовых координат [1], которая чаще всего используется в прикладных исследованиях, поскольку она является удобной инерциальной галилеевой системой координат.

Определение 1. [3] Геометрическая фигура $P_1, P_2, \dots, P_n$, образованная телами $P_1, P_2, \dots, P_n$, называется *центральной конфигурацией* в барицентрической системе координат $G\xi\eta\zeta$, если сила ньютоновского притяжения $\vec{F}_k$, действующая на каждое тело $P_k (k = \overline{1, n})$ с массой m_k , в любой фиксированный момент времени t_0 , пропорциональна массе m_k и вектору $\overline{\rho_k}$, определяющему положение тела P_k в

этой системе координат, причем коэффициент пропорциональности σ является одним и тем же для всех тел $P_k (k = \overline{1, n})$.

Под барицентрической системой координат понимается система координат, в начало которой помещается центр масс тел.

Это определение, очевидно, выражается следующими равенствами:

$$\vec{F}_k = \sigma \cdot m_k \vec{\rho}_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где коэффициент подобия σ не зависит от индекса k . Учитывая соотношения (1), получим дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sigma \vec{r}_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

А. Уинтнер вывел общую формулу для множителя σ :

$$\sigma = -\frac{U}{I}, \quad I = \sum_{k=1}^n m_k \rho_k^2, \quad (6)$$

где U - ньютонов гравитационный потенциал (2) системы n тел $P_1, P_2, \dots, P_n$, I - ее суммарный барицентрический момент инерции.

Тогда система нелинейных функциональных уравнений

$$\overrightarrow{\text{grad}}_k U = -\frac{m_k U}{I} \vec{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

определяет все центральные конфигурации системы n тел в момент времени t_0 . В математической литературе система уравнений (7) названа *системой Лагранжа-Уинтнера*.

Можно сказать, что *гомографическое решение* – это такое решение, которое в каждый момент времени t геометрически «дает» центральную конфигурацию.

Примером таких конфигураций в барицентрической системе координат являются знаменитые частные решения дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел, найденные Эйлером и Лагранжем, так называемые коллинеарные решения Эйлера и треугольник Лагранжа [2].

В проблеме $n > 4$ тел О.Дзиобек и А.Винтнер нашли гомографическое решение, геометрически изображаемое правильным n - угольником, вращающимся с однозначно определяемой угловой скоростью вокруг центра симметрии [2].

Вопрос об определении и существовании центральных конфигураций в неинерциальной системе декартовых координат с началом в одном из притягивающих тел был поставлен и решен в работах Е.А. Гребеникова [2,4].

Им было дано понятие центральной конфигурации для неинерциальных конфигурационных пространств.

Определение 2 [2]. Центральной конфигурацией n тел $P_1, P_2, \dots, P_n$ проблемы $(n+1)$ тел в неинерциальной относительной декартовой системе координат P_0 хуз называется геометрическая фигура с указанными точками в ее вершинах, координаты которых определяются из следующих функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} - \frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} = \sigma x_k, \\ \frac{\partial R_k}{\partial y_k} - \frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} = \sigma y_k, \\ \frac{\partial R_k}{\partial z_k} - \frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} = \sigma z_k, \quad r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (8)$$

Рис. 1. Некоторые центральные конфигурации

В этом случае коэффициент пропорциональности определяется формулой

$$\sigma = -\frac{W}{I} \quad (9)$$

где аналогом ньютонова гравитационного потенциала $U(2)$ является следующая функция:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^n \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^n m_k m_s (x_k x_s + y_k y_s + z_k z_s) \left[\frac{1}{r_k^3} + \frac{1}{r_s^3} \right] + \sum_{k=1}^n \frac{(m_0 + m_k) m_k}{r_k}.$$

Данные работы и возможности систем компьютерной алгебры (например, система Mathematica [5]), послужили началом поисков и исследований новых гомографических решений. В результате найдено множество новых центральных конфигураций для ньютоновых задач $n > 4$ тел и исследованы их геометрические и динамические свойства [6,7,8].

Ниже приведены рисунки, изображающие некоторые точные гомографические решения для различных значений параметра n .

Кроме того, в исследованиях авторов [6, 7] с использованием Системы Mathematica получены точные соотношения между динамическими параметрами (гравитирующими массами) и геометрическими параметрами (взаимными расстояниями и углами конфигураций) в компактной форме, гарантирующие существование данных конфигураций.

Фундаментальной и пока нерешенной до конца проблемой для науки является проблема устойчивости взаимно гравитирующих динамических систем, состоящих из материальных точек, не говоря о системах гравитирующих тел. Для конкретных динамических моделей, то есть для некоторых конкретных значений параметра n написаны в окончательном виде математические условия, которым должны удовлетворять динамические и геометрические параметры модели, обеспечивающие устойчивость динамической системы в первом приближении и в смысле Ляпунова[2].

В работе [2] показано, что всякое гомографическое решение ньютоновой проблемы n тел порождает новую динамическую модель – ограниченную проблему $(n+1)$ – тел. Для нее была сформулирована следующая задача:

При каких условиях, наложенных на динамические и геометрические параметры динамической модели, существует во вращающейся системе координат такая конфигурация, в которой гравитационный многоугольник и «пасивно» гравитирующая масса являются «вечно» неподвижными. Иными словами, существуют ли точные стационарные решения дифференциальных уравнений ограниченных задач многих тел во вращающихся системах координат?

Иными словами, сформулирована задача о существовании гомографических решений, но уже в ограниченных задачах небесной механики.

В работах [2, 6, 7] доказано, что дифференциальные уравнения ограниченных задач для различных значениях n допускают гомографические решения, поиск которых можно реально осуществить, используя современные методы компьютерной алгебры.

Список используемых источников:

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Наука, 1976. 854 с.
2. Гребеников Е.А., Сковородкин Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. Москва, 2002. 212 с.
3. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967.
4. Гребеников Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // Мат. Моделирование. 1998. Т. 10. N. 8. С. 75-80.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. М.: Солон-Пресс, 2004.
6. Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. М.: МАКС Пресс, 2010.
7. Земцова Н.И. Качественные исследования ньютоновой проблемы многих тел методами компьютерной алгебры. М.: изд-во ВЦ РАН, 2010. 61 с.
8. Земцова Н.И. Нормализация гамильтониана в пространственной ограниченной задаче шести тел // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. 2015. С. 76-94.

© 2016, Земцова Н.И.

Новые гомографические решения в проблеме многих тел

© 2016, Zemtsova N.I.

A new homographical solutions in many-body problem