DOI: 10.17117/na.2016.06.02.292

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.292.pdf>

Поступила (Received): 15.06.2016

Семенова Г.Д. Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

Semenova G.D.
An example of the constancy of nonlinear
ordinary differential equation

На примере нелинейного уравнения второго порядка показан алгоритм обнаружения условия неустойчивости процесса. Показано, что в этом случае связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, вырождается. Численное решение дифференциального уравнения получено методами системы компьютерной математики Maple

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

Семенова Галина Дмитриевна

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

For a sample of nonlinear equation of second order is shown an algorithm for finding the conditions of constancy of the process. It is shown that in this case, the correlation between the variations of the derivatives of different orders that satisfy the original differential equation degenerates. Numerical solution of the differential equation obtained by means of computer algebra system Maple

Key words: differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

Semenova Galina Dmitrievna

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория стабильности дифференциальных уравнений, предложенная в [1-3], имеет приложение в задачах резания металлов [4-6], в задаче о заклинивании поршня [7]. Теория основана на особенностях начальной задачи, замеченных ранее в задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14] и задаче о плоском напряженном состоянии в упругом теле [15]. Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого процесса

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c\sqrt{x-d} = 0, \quad (1)$$

где a и b , c и d – произвольные вещественные константы. Производные по времени обозначены как: $\dot{x} = dx(t)/dt$, $\ddot{x} = d^2x(t)/dt^2$. Определим точку неустойчивости порядка (0/3) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$a\Delta\ddot{x} + b\Delta\dot{x} + \frac{c}{2\sqrt{x-d}}\Delta x = 0. \quad (2)$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции $x(t)$ в уравнение должны входить эти величины. Если вторая производная в уравнение входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\Delta\ddot{x} + b\Delta\ddot{x} - \frac{c\dot{x}}{4(x-d)^{3/2}}\Delta x + \frac{c}{2\sqrt{x-d}}\Delta\dot{x} = 0 \quad (3)$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости (0/3), величины Δx и $\Delta\ddot{x}$ задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) выразить приращение первой производной приращения функции $\Delta\dot{x}$ и ее второй производной $\Delta\ddot{x}$. Запишем систему в матричной форме

$$\begin{bmatrix} b & a \\ \frac{c}{2\sqrt{x-d}} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

отнеся в правую часть известные (по условию возмущения) величины

$$\alpha_1 = \frac{c}{2\sqrt{x-d}}\Delta x, \alpha_2 = a\Delta\ddot{x} - \frac{c\dot{x}}{4(x-d)^{3/2}}\Delta x.$$

Если определитель полученной системы равен нулю, то связь между производными вырождается. Задание указанных приращений в этом состоянии приводит к неограниченному росту $\Delta\dot{x}$ и $\Delta\ddot{x}$, что может вызывать непредсказуемые для процесса последствия. Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3): $b^2 - \frac{ac}{2\sqrt{x-d}} = 0$. В результате

получаем условие $4b^2x - 7b^2 - a^2c^2 = 0$. В это условие не входит производная функции, а только ее значение. На рисунке 1 показана зависимость решения (значение опасной в смысле неустойчивости) величины функции от констант задачи.

Рис. 1. Условие неустойчивости при $d=1,75$, 1) $b=1, c=1$; 2) $b=2, c=2$; 3) $b=3, c=3$

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [16,17]. Приведем для примера фрагмент соответствующей программы при некоторых значениях констант задачи: $a = b = c = 1, d = 1,75$:

```
sys1:=diff(dx(t),t)=(-(x(t)-1.75)^(0.5)-dx(t)),
diff(x(t),t)=dx(t);
f:={x(t),dx(t)};
InC:=x(0)=2,dx(0)=2;
FNUM:=dsolve({sys1,InC},f,numeric,output=listprocedure);
X:=subs(FNUM,x(t));
plot(X,-2..5,color=[red],thickness=2);
```

Рис. 2. Численное решение (1) при условии: $x(0)=2, \dot{x}(0)=2$

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // *Exponenta Pro. Математика в приложениях*. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева*. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // *Известия вузов. Строительство*. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В. Структурно-параметрический синтез технологических систем. Курск, 2010. 153 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // *Прикладная механика и техническая физика*. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ квазистатического критерия выпучивания стержня при ползучести // *Упругость и неупругость*. М.: МГУ, 2016. С. 232-237.
10. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
11. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // *Int.J.Eng.Sci.* 1997. Vol. 5. No.3. P. 221-227.
12. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1992. Vol. 33. No. 4. P. 573-576.

13. Кирсанов М.Н. Выпучивание пластины из нелинейного реологического материала при переменном нагружении // *Филология и культура*. 2011. № 24. С. 19-22.
14. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 1986. №6. С. 126-129.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
16. Кирсанов М.Н. *Maple и MapleT. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
17. Голоскоков Д.П. *Практический курс математической физики в системе Maple*. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.

© 2016, Семенова Г.Д.

*Пример неустойчивости нелинейного
обыкновенного дифференциального уравнения*

© 2016, Semenova G.D.

*An example of the constancy of nonlinear ordinary
differential equation*