DOI: 10.17117/na.2016.06.02.285

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.285.pdf>

Поступила (Received): 24.06.2016

Показаньев И.Д.

Стабильность и численное решение одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

Pokazaniev I.D.

Constancy and numerical solution of a nonlinear ordinary differential equation

Получено условие вырождения связи между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Использована система компьютерной математики Maple. Численное решение построено оператором *dsolve* для уравнения, записанного в форме Коши

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

The condition of degeneration of relationships between the variations of the derivatives of different orders, satisfying the nonlinear differential equation of second order is obtained. Used system of computer mathematics Maple. The numerical solution built by the operator *dsolve* for the equation written in the form of Cauchy

Key words: differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

Показаньев И.Д.

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Pokazaniev I.D

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

На основе теории стабильности (англ. *constancy*) дифференциальных уравнений, которая может быть применима и для обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и для уравнений в частных производных [2], рассмотрим уравнение некоторого динамического процесса

$$a\ddot{x} + bx^2 = C, \quad (1)$$

где a и b – некоторые константы процесса. Производные по времени обозначены как: $\dot{x} = dx(t) / dt$, $\ddot{x} = d^2x(t) / dt^2$. Теория имеет приложение и подтверждена экспериментально в задачах обработки металлов [3-6], выпучивания конструкций в условии ползучести [7-13]. Приложения теории изучены при исследовании заклинивания поршня [14] и при анализе распределения напряжений в неоднородном упругом теле [15] (уравнения в частных производных).

Определим точку неустойчивости порядка (2/3). Так как изучается не сам процесс, а его малая вариация (именно поэтому теория неустойчивости приме-

нима в задаче выпучивания при ползучести, по сути близкой к задаче устойчивости, где рассматриваются всегда малые отклонения от основного процесса), проварьировуем уравнение (1):

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2bx\Delta x = 0. \quad (2)$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции $x(t)$ в уравнение должны входить соответственно вторая и третья производная вариации этой величины. Если вторая производная в уравнение (2) входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2a\ddot{x}\Delta\dot{x} + 2b\dot{x}\Delta x + 2bx\Delta\dot{x} = 0. \quad (3)$$

Для того, чтобы свести поставленную начальную задачу с необычными (высшими) производными в начальных условиях к задаче Коши, необходимо из системы (2), (3) выразить приращения $\Delta\dot{x}$ и Δx . Запишем систему для приращений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2bx & a\ddot{x} \\ 2b\dot{x} & a\ddot{x} + 2bx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

где в правой части стоят выражения, зависящие от заданных приращений. Равенство определителя нулю означает вырождение связи между производными, что как раз соответствует неустойчивости порядка (2/3). Приравняем определитель нулю. Получим условие неустойчивости порядка (2/3): $2bxa\ddot{x} + 4b^2x^2 - 2a\ddot{x}b\dot{x} = 0$. Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения: $\ddot{x} = -bx^2 / (a\dot{x})$. Продифференцировав это выражение по времени получим: $\ddot{x} = -2bx / a + bx^2\ddot{x} / (a\dot{x}^2)$, которое тоже подставим в условие неустойчивости. В результате получаем условие

$$-bx^5 / (a\dot{x}^3) + x^2 = 0. \quad (4)$$

Отсюда очевидно, что одними из условий неустойчивости является равенство $x=0$. Кривая зависимости нетривиального решения алгебраического уравнения (4) от параметра b при $\dot{x}=3$ и $a=27$ построена на рисунке 1.

Рис. 1. Зависимость условия неустойчивости от параметра b

Численное решение уравнения (1) может быть получено оператором dsolve системы Maple [2]. Соответствующие кривые при разных начальных скоростях приведены на рисунке 2.

Рис. 2. 1) $\dot{x}(0) = 1$; 2) $\dot{x}(0) = 1$; 3) $\dot{x}(0) = 3$

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
4. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
5. Ивахненко А.Г., Куц В.В. Структурно-параметрический синтез технологических систем. Курский государственный технический университет. Курск, 2010. 153 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
8. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ квазистатического критерия выпучивания стержня при ползучести // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 2016. С. 232-237.
9. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
10. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.
11. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33. No. 4. P. 573-576.
12. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.

13. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
14. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.

© 2016, Показаньев И.Д.

Стабильность и численное решение одного
нелинейного обыкновенного дифференциального
уравнения

© 2016, Pokazaniev I.D.

Constancy and numerical solution of a nonlinear
ordinary differential equation