DOI: 10.17117/na.2016.06.02.242

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.242.pdf>

Поступила (Received): 30.06.2016

Коротков А.В. Преобразование чисел Пифагора

Korotkov A.V. The conversion of numbers of Pythagoras

The article contains materials on the legacy of Pythagoras, Diophantus, Fibonacci. Materials on the Pythagorean triples in terms of using in a multidimensional Euclidean space. The paper is organized in the traditional symbolism, based on the needs of the applications that are used appropriate materials. However, their consideration may be extended by the number of constituent elements. This makes it accessible to students, teachers and scientists specializing in many fields of science and technology

Ключевые слова: Пифагор, Диофант, матрицы, числа, преобразования

Коротков Анатолий Васильевич

Доктор физико-математических наук, кандидат технических наук, академик МАСИ, доцент
Шахтинский завод гидропривод
г. Шахты, пер. Якутский, 2

The article is devoted to the analysis of power series, using the musical scale advantages of the Golden section. The base of the number and initial frequency of a multiple of the amount 1,61803398875 that characterizes the Golden ratio. This leads to the standard frequency of 435 Hz corresponding to the note "La" first octave. The combined effect of musical instruments, hearing and the relevant space can create the effect of musical resonance

Key words: Pythagoras, Diophantus, matrix, number, convert

Korotkov Anatoly Vasilyevich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Candidate of Technical Sciences, Academician of the MASI, Associate Professor
Shakhty factory gidroprivod
Shakhty, Yakutsky lane, 2

В [1] подчеркивается, что тройки Пифагора могут быть умножены друг на друга. При этом используется матричное исчисление и матрицы преобразования позволяющие получить произведение матрице-строки и квадратной матрицы, а также двух квадратных матриц третьего порядка друг на друга, причем результатом произведения является Пифагорова тройка чисел. Эти матрицы могут быть задействованы также для чисел Фибоначчи и имеют следующий вид

$$a1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad a2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad a3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad a4 = \begin{vmatrix} -0,5 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1,5 \end{vmatrix}$$

Нами найдены четыре квадратные матрицы третьего порядка, осуществляющие преобразование пифагоровых троек в пифагоровы тройки. Это матрицы a1, a2, a3, a4 приведенные выше, проиллюстрируем эти слова результатами произведения матрицы

$$\begin{aligned}
 a_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 12 & 13 \end{vmatrix} & a_1^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 a_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 8 & 17 \end{vmatrix} & a_2^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 a_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 20 & 29 \end{vmatrix} & a_3^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 a_4 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -0,5 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 12 & 13 \end{vmatrix} & a_1^{-1} = \begin{vmatrix} -0,5 & 1 & -0,5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -0,5 & -1 & 1,5 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Очевидно, что произведения матриц дают различные результаты, что может быть задействовано для получения различных последовательностей. Ранее для этой же цели нами использовались рекуррентные соотношения. Произведения матриц целесообразно использовать в программной среде Mathcad. Основные свойства произведения матриц следующие:

- Матрицы-строки задействуют пифагоровы тройки, сумма квадратов двух первых чисел в них определяет квадрат третьего числа.

- Результатом произведения матрицы строки на квадратную матрицу обеспечивается получение пифагоровы матрицы-строки.

- Очень важно, что использование произведения матриц преобразования 3*3 обеспечивает получение степеней и произведений отдельных матриц. Очевидно, что первые три матрицы определяются целыми числами.

- Четвертая матрица задействует полуцелые числа вида $n/2$. Однако получаемые произведения задействуют только целые числа.

- Очень важно, что квадратные матрицы фиксируют также обратные матрицы, причем эти матрицы (кроме преобразования Фибоначчи) определяются только целыми числами. Очевидно также, что произведения матрицы обратного преобразования на матрицу прямого преобразования, как и должно, быть дает единичную матрицу.

- Таким образом, преобразования пифагоровых троек располагают произведением, обратными матрицами и единичной матрицей, так что они образуют целочисленную (несмотря на операцию деления) мультипликативную группу.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} &=^{-1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} &=^{-1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &=^{-1} \begin{vmatrix} 1/4 & 1 & - \\ 1 & 1 & -1 \\ - & -1 & 5/4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} &=^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Это пожалуй редкий пример, целочисленной группы преобразований. Имеем:

(3 4 5)	*	(a ₁) ¹	=	(7 24 25)
(7 24 25)	*	(a ₁) ¹	=	(9 40 41)
(9 40 41)	*	(a ₁) ¹	=	(11 60 61)
(11 60 61)	*	(a ₁) ¹	=	(13 84 85)
(13 84 85)	*	(a ₁) ¹	=	(15 112 113)
...	...	...	...	...
(3 4 5)	*	(a ₂) ¹	=	(15 8 17)
(15 8 17)	*	(a ₂) ¹	=	(35 12 37)
(35 12 37)	*	(a ₂) ¹	=	(63 16 35)
(63 16 35)	*	(a ₂) ¹	=	(99 20 101)
(99 20 101)	*	(a ₂) ¹	=	(143 24 145)
...	...	...	...	...
(3 4 5)	*	(a ₄) ¹	=	(21 20 29)
(21 20 29)	*	(a ₄) ¹	=	(119 120 169)
(119 120 169)	*	(a ₄) ¹	=	(697 696 985)
(697 696 985)	*	(a ₄) ¹	=	(4059 4060 5741)
(4059 4060 5741)	*	(a ₄) ¹	=	(2366 2366 3346)
...	...	...	...	...
(3 4 5)	*	(a ₃) ¹	=	(5 12 13)
(5 12 13)	*	(a ₃) ¹	=	(16 30 34)
(16 30 34)	*	(a ₃) ¹	=	(39 80 89)
(39 80 89)	*	(a ₃) ¹	=	(105 208 233)
(105 208 233)	*	(a ₃) ¹	=	(272 546 610)
...	...	...	...	...

Таким образом, можно сформировать четыре типа последовательностей с применением матриц прямого (либо обратного) преобразований. Из них путем различных комбинаций можно построить значительное число последовательностей. Вот некоторые из них:

3	5	7	9	3	15	35	63	3	21	119	697	3	21	119	697
4	12	24	40	4	8	12	16	4	20	120	696	4	20	120	696
5	13	25	41	5	17	37	65	5	29	169	985	5	29	169	985
21	55	105	171	21	65	133	225	5	55	297	1755	15	65	403	2325
20	48	88	140	20	72	156	272	12	48	304	1748	8	72	396	2332
29	73	137	221	29	97	205	353	13	73	425	2477	17	97	565	3293
119	297	555	893	119	403	855	1475	7	105	555	3293	35	133	133	4905
120	304	572	924	120	396	832	1428	24	88	572	3276	12	156	156	4928
169	425	797	1285	169	565	1193	2053	25	137	797	4645	37	205	205	6953
697	1755	3293	5311	697	2325	4905	8437	9	171	893	5311	63	225	1475	8437
696	1748	3276	5280	696	2332	4928	8484	40	140	924	5280	16	272	1428	8484
985	2477	4645	7489	985	3293	6953	11965	41	221	1285	7489	65	353	2053	11965

Каждая третья строка является суммой квадратов двух предыдущих строк. Более серьезное значение подобных последовательностей дает процесс объединения троек Пифагора и троек Диофанта, при этом получают шестерки чисел Пифагора-Диофанта, так что сумма пяти квадратов определяет квадрат шестого числа. Это видно из следующей таблицы:

-1	-7	-17	-31	-1	7	23	47	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
3	5	7	9	3	15	35	63	3	21	119	697	3	21	119	697
4	12	24	40	4	8	12	16	4	20	120	696	4	20	120	696
5	13	25	41	5	17	37	65	5	29	169	985	5	29	169	985
7	17	31	49	7	23	47	79	7	41	239	139	7	41	239	139
10	26	50	82	10	34	74	130	10	58	338	197	10	58	338	197
1	7	17	31	1	-7	-23	-47	-7	7	-7	7	7	-7	7	-7
21	55	105	171	21	65	133	225	5	55	297	175	15	65	403	232
20	48	88	140	20	72	156	272	12	48	304	174	8	72	396	233
29	73	137	221	29	97	205	353	13	73	425	247	17	97	565	329
41	103	193	311	41	137	289	497	17	10	601	350	23	13	799	465
58	146	274	442	58	194	410	706	26	14	850	495	34	19	113	658
-1	-7	-17	-31	-1	7	23	47	-	17	-17	17	23	-	-23	-23
119	297	555	893	119	403	855	147	7	10	555	329	35	13	133	490
120	304	572	924	120	396	832	142	24	88	572	327	12	15	156	492
169	425	797	128	169	565	119	205	25	13	797	464	37	20	205	695
239	601	112	181	239	799	168	290	31	19	112	656	47	28	289	983
338	850	159	257	338	113	238	410	50	27	159	929	74	41	410	139
1	7	17	31	1	-7	-23	-47	-	31	-31	31	47	-	47	-47
697	175	329	531	697	232	490	843	9	17	893	531	63	22	147	843
696	174	327	528	696	233	492	848	40	14	924	528	16	27	142	848
985	247	464	748	985	329	695	119	41	22	128	748	65	35	205	119
139	350	656	105	139	465	983	169	49	31	181	105	79	49	290	169
197	495	929	149	197	658	139	239	82	44	257	149	13	70	410	239

Этим таблицам соответствуют шестимерные матрицы преобразования чисел Пифагора-Диофанта, расширяющие трехмерные квадратные матрицы преобразования пифагоровых чисел. Они имеют вид:

$$b_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = 1/2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Эти таблицы позволяют получать бесконечные последовательности шестерок чисел Пифагора-Диофанта таких, что сумма квадратов двух чисел троек матриц, а также сумма квадратов пяти чисел шестерок матриц дает квадраты третьего и шестого числа. Особое значение приобретает не только построение бесконечного множества последовательностей и их классификация, а также то, что матрицы преобразования можно перемножать между собой. Так, например, преобразования

a_1*a_1	a_1*a_2	a_1*a_3	a_1*a_4
a_2*a_1	a_2*a_2	a_2*a_3	a_2*a_4
a_3*a_1	a_3*a_2	a_3*a_3	a_3*a_4
a_4*a_1	a_4*a_2	a_4*a_3	a_4*a_4

дают некоторые примеры для получения троек Пифагора, а матрицы

b_1*b_1	b_1*b_2	b_1*b_3	b_1*b_4
b_2*b_1	b_2*b_2	b_2*b_3	b_2*b_4
b_3*b_1	b_3*b_2	b_3*b_3	b_3*b_4
b_4*b_1	b_4*b_2	b_4*b_3	b_4*b_4

дают некоторые примеры для получения шестерок Пифагора-Диофанта. Более того, такое многообразие матриц может быть каплей в море, если каждую матрицу представить в виде степени отдельных матриц. Это позволяет обеспечить процесс кодирования и декодирования чисел Пифагора и Пифагора-Диофанта. Так что кодам 1:0; 0:1, либо 0:0 соответствуют разные матрицы преобразования.

$$b_1^{1*}b_2^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b_1^{1*}b_2^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 11 & 16 \\ -3 & -4 & -1 & -4 & -5 & -8 \\ 4 & 8 & 4 & 9 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Степень чисел может быть увеличена до бесконечности любого числа. Таким образом, найдены матрицы преобразований третьего и шестого порядков, последние определяют преобразования троек Пифагора и троек Диофанта. Эти преобразования определяют бесконечные последовательности троек и шестерок Пифагора и Диофанта. Число этих последовательностей также бесконечно велико.

Список используемых источников:

1. Коротков А.В. Сборник отдельных научных работ. Таблицы чисел Пифагора, Диофанта, Фибоначчи. Новочеркасск: НОК, 2013. 44 с.