DOI: 10.17117/na.2016.06.02.228

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.228.pdf>

Поступила (Received): 03.06.2016

Киреева О.И. Реализация метода сопряженных градиентов для задачи Дирихле в прямоугольнике

Kireeva O.I. Conjugate gradient method implementation for the Dirichlet problem in rectangle

В статье предлагается модификация метода сопряженных градиентов для решения задачи Дирихле в прямоугольной области. Решение разностных уравнений сводится к итерационному процессу на основе модификации метода сопряженных градиентов. Демонстрируются результаты экспериментов и реализация алгоритма в среде MathCad

Ключевые слова: метод сопряженных градиентов, стационарное уравнение теплопроводности

The article proposes a modification of the Conjugate gradient method for solving the Dirichlet problem in rectangular area. The solution of difference equations is reduced to recursive process on the basis of the modification of the conjugate gradient method. Shows the results of experiments and algorithm implementation in MathCad Wednesday

Key words: conjugate gradient method, stationary heat conduction equation

Киреева Ольга Ильинишна

Кандидат физико-математических наук, доцент
Российский государственный социальный
университет
г. Москва, ул. В. Пика, 4 А

Kireeva Olga Ilyinichna

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Associate Professor
Russian state social university
Moscow, V. Pika st., 4 A

Будем рассматривать стационарную краевую задачу теплопроводности в прямоугольной области [1, 2].

Простейшая разностная схема для уравнения Пуассона в прямоугольнике (задача Дирихле) имеет вид

$$-\Delta h U = -\alpha_x \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_x^2} - \alpha_y \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j},$$

$$1 \leq i \leq N - 1$$

$$1 \leq j \leq M - 1$$

$$U_{i,0} = g_0(x_i), U_{i,M} = g_1(x_i), 0 \leq i \leq N$$

$$U_{0,j} = g_2(y_j), U_{N,j} = g_3(y_j), 0 \leq j \leq M - 1,$$

где $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, $x_i = i * hx$, $y_j = j * hy$, $hx = \frac{x}{N}$, $hy = \frac{y}{M}$ и коэффициенты $\alpha_x > 0, \alpha_y > 0$

Далее требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (1)$$

с положительно определенной матрицей A порядка n .

Рассмотрим функционал

$$f(\bar{x}) = (\bar{x}, A\bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}), \quad (2)$$

представляющий многочлен второго порядка относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Обозначим через $\bar{x}^*$ решение системы (1), т.е. $\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$. В силу симметричности и положительной определенности матрицы, имеем:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) &= (\bar{x}, A\bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}) - (\bar{x}^*, A\bar{x}^*) + 2(\bar{b}, \bar{x}^*) \\ &= (\bar{x}, A\bar{x}) - 2(\bar{x}, A\bar{x}^*) + (\bar{x}^*, A\bar{x}^*) = (\bar{x} - \bar{x}^*, A(\bar{x} - \bar{x}^*)) \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

При этом знак равенства возможен лишь при $\bar{x} = \bar{x}^*$. Таким образом, задача решения уравнения (1) сводится к задаче отыскания вектора $\bar{x}$, обращающего в минимум функционал (2). Для отыскания такого вектора применим следующий метод.

Пусть $\bar{x}^{(0)}$ – произвольный начальный вектор, а

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)} \quad (4)$$

вектор невязок системы. Покажем, что вектор невязок $\bar{r}^{(0)}$ имеет направление нормали к поверхности $f(\bar{x}) = f(\bar{x}^{(0)})$ в точке $(\bar{x}) = (\bar{x}^{(0)})$. В самом деле, направление нормали совпадает с направлением быстрейшего изменения функции $f(\bar{x})$ в точке $(\bar{x}) = (\bar{x}^{(0)})$. Это направление мы найдем, если найдем среди векторов $\bar{c}$, для которых $(\bar{c}, \bar{c}) = const$, такой вектор, что

$$\left| \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{c}) \right|_{\alpha \rightarrow 0}$$

имеет наибольшее значение. Но

$$\begin{aligned} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{c}) &= (\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{c}, A\bar{x}^{(0)} + \alpha A\bar{c}) - 2(\bar{b}, \bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{c}) \\ &= \alpha^2(\bar{c}, A\bar{c}) - 2\alpha(\bar{b} - A\bar{x}^{(0)}, \bar{c}) + (\bar{x}^{(0)}, A\bar{x}^{(0)}) - 2(\bar{b}, \bar{x}^{(0)}) \\ &= \alpha^2(\bar{c}, A\bar{c}) - 2\alpha(\bar{r}^{(0)}, \bar{c}) + f(\bar{x}^{(0)}); \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{c}) = 2\alpha(\bar{c}, A\bar{c}) - 2(\bar{r}^{(0)}, \bar{c});$$

$$\left| \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{c}) \right|_{\alpha \rightarrow 0} = 2|\bar{r}^{(0)}, \bar{c}|$$

Но среди векторов $\bar{c}$ постоянной длины $|\bar{r}^{(0)}, \bar{c}|$ достигает максимального значения, если $\bar{c}$ имеет направление вектора $\bar{r}^{(0)}$ или ему противоположное. Будем двигаться из точки $\bar{x}^{(0)}$ в направлении вектора $\bar{r}^{(0)}$ до тех пор, пока функция $f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{r}^{(0)})$ достигает минимального значения. Это будет при $\frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{r}^{(0)}) = 0$, т.е. при

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}. \quad (5)$$

Вектор

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \alpha_0 \bar{r}^{(0)} \quad (6)$$

и принимаем за новое приближение к решению.

Продолжая процесс, получим последовательности векторов $\{\bar{x}^{(k)}\}$, $\{\bar{r}^{(k)}\}$, $\{\bar{p}^{(k)}\}$, определяемые рекуррентными соотношениями:

$$\bar{p}^0 = \bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)}; \alpha_k = \frac{(\bar{r}^{(k)}, \bar{p}^{(k)})}{(\bar{p}^{(k)}, A\bar{p}^{(k)})};$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{p}^{(k)}; \bar{r}^{(k+1)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k+1)} = \bar{r}^{(k)} - \alpha_k A\bar{p}^{(k)}$$

Данный метод является развитием практических идей [2].

Метод сопряженных градиентов удобно реализовать в программной среде Mathcad, результаты выводить в виде трехмерных графиков.

Эксперимент 1. Размеры пластины $X=Y=\pi$, число отрезков разбиения $N=M=50$, коэффициенты $\alpha_x=1$, $\alpha_y=1$, сток тепла $f(x,y)=-10 \sin \frac{\pi}{50}x \sin \frac{\pi}{50}y$, граничные условия линейные $g_0(x)=x$, $g_1(x)=Y+x$, $g_2(y)=y$, $g_4(y)=X+y$, точность $\varepsilon=10^{-3}$. Потребовалось 90 итераций.

Эксперимент 2. Размеры пластины $X=Y=\pi$, число отрезков разбиения $N=M=50$, коэффициенты $\alpha_x=1$, $\alpha_y=1$, источник тепла $f(x,y)=0$, граничные условия линейные $g_0(x)=x$, $g_1(x)=Y+x$, $g_2(y)=y$, $g_4(y)=X+y$, точность $\varepsilon=10^{-3}$. Потребовалось 88 итераций.

Эксперимент 3. Размеры пластины $X = Y = \pi$, число отрезков разбиения $N = M = 50$, коэффициенты $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = 1$, источник тепла $f(x, y) = 10 \sin x \sin y$, граничные условия однородные $g_0(x) = 0$, $g_1(x) = 0$, $g_2(y) = 0$, $g_4(y) = 0$, точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Потребовалась 1 итерация.

Список используемых источников:

1. Попова Т.М. Методы решения задач математической физики. Издательство Тихоокеанского государственного университета, 2008.
2. Сошенко М.В., Киреева О.И., Лебедева М.В. Разработка систем вентиляции с утилизаторами тепла кипящего слоя // Фундаментальные и прикладные научные исследования. 2015. С. 54-55.

© 2016, Киреева О.И.

Реализация метода сопряженных градиентов для задачи Дирихле в прямоугольнике

© 2016, Kireeva O.I.

Conjugate gradient method implementation for the Dirichlet problem in rectangle