DOI: 10.17117/na.2016.06.02.218

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.218.pdf>

Поступила (Received): 18.06.2016

Евстигнеев Д.Е. Исследование стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple

Evstigneev D.E.
Study of constancy and solution of nonlinear ordinary
differential equation in system Maple

Найдено условие, при котором связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, вырождается. Для примера получено численное решение классической начальной задачи методами системы компьютерной математики Maple с применением оператора *dsolve*

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

Found the condition under which the correlation between the variations of the derivatives of different orders, satisfying the differential equation degenerates. For example, a numerical solution of the classical initial value problem by methods of computer algebra system Maple using the *dsolve* operator is obtained

Key words: differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

Евстигнеев Дмитрий Евгеньевич

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Evstigneev Dmitry Evgenevich

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1-3] изложены некоторые положения теории стабильности дифференциальных уравнений. Эта теория имеет приложение в задачах в задаче о заклинивании поршня [7], резания металлов [4-6]. Основой теории являются особенности начальной задачи, замеченные в задаче о напряжениях в неоднородном упругом теле [8] и проблеме выпучивания конструкций в условии ползучести [9-15]. Здесь будет рассмотрено нелинейное уравнение вида

$$a\ddot{x}\dot{x} + bx^2 + cx = 0, \quad (1)$$

где a, b и c – произвольные вещественные константы. Производные по времени t обозначены точками. Найдем условие неустойчивости порядка $(0/3)$. Согласно [16, с. 216] проварьируем уравнение:

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2bx\Delta x + c\Delta x = 0. \quad (2)$$

Чтобы найти условие неустойчивости необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2b\dot{x}\Delta x + 2bx\Delta\dot{x} + c\Delta\dot{x} = 0. \quad (3)$$

Согласно определению порядка неустойчивости (0/3), величины Δx и $\Delta \ddot{x}$ задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической Коши, необходимо из системы (2), (3) выразить приращения первой $\Delta \dot{x}$ и второй производной $\Delta \ddot{x}$ через заданные приращения. Запишем систему (2,3) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a\ddot{x} & a\dot{x} \\ a\ddot{x} + 2bx + c & 2a\dot{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где введены обозначения y_1, y_2 для слагаемых, содержащих заданные возмущенные производные (в данном случае нулевая и третья). Если определитель равен нулю, то это означает, что связи между производными вырождаются. К начальной задаче Коши поставленная задача с такими начальными условиями не сводится. Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3):

$$a\dot{x}^2 - \dot{x}(a\ddot{x} + 2abx + c) = 0. \quad (4)$$

Вторую производную (ускорение) в это условие можно подставить из самого уравнения: $\ddot{x} = -x(bx + c) / (a\dot{x})$. Дифференцируем (4) еще раз по времени:

$$\ddot{x} = -(2bx + c) / a + x(bx + c)\ddot{x} / (a\dot{x}^2)$$

и подставим это выражение в условие неустойчивости. В результате получаем условие

$$3x^2(b^2x^2 + 2cbx + c^2) / \dot{x}^2 = 0. \quad (5)$$

Отсюда очевидно, что одними из условий неустойчивости является равенство $x=0$. Другое условие – кратный корень уравнения $b^2x^2 + 2cbx + c^2 = 0$, $x = -c/b$, не зависящий от скорости.

Рис. 2. Численное решение (1).

1 – $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$; 2 – $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -0,2$

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [16]. Приведем соответствующие операторы, взяв произвольные начальные данные и параметры a, b, c :

```
> restart:a:=1:b:=-60:c:=1:
> s:=diff(dx(t),t)=-
x(t)*(b*x(t)+c)/dx(t)/a,diff(x(t),t)=dx(t):
> f:={x(t),dx(t)}:
> ic1:=x(0)=0,dx(0)=1:
> ic2:=x(0)=2,dx(0)=-0.2:
> fn1:=dsolve({s,ic1},f,numeric,output=listprocedure):
> fn2:=dsolve({s,ic2},f,numeric,output=listprocedure):
> X1:=subs(fn1,x(t)):X2:=subs(fn2,x(t)):
> plot([X1,X2],0..1,color=[red,blue,black],thickness=2);
```

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // Известия вузов. Строительство. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Ивахненко А. А. Применение вариационного исчисления в задачах управления качеством продукции и процессов машиностроения // Проблемы и достижения в инновационных материалах и технологиях машиностроения. 2015. С. 111-113.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Kirsanov M.N. Stress distribution instability in the plane problem of the theory of elasticity of heterogeneous bodies // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Vol. 54. Iss. 3. P. 487-490.
9. Kirsanov M.N. Initial transcritical behavior in a compressed rod under creep conditions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1993. Vol. 3. Iss. 2. P. 292-295.
10. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33, Iss. 4. P. 573-576.
11. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
12. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Vol. 5. No.3. P. 221-227.
13. Kirsanov M.N. Buckling of a ductile column under rigid loading // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1994. Vol. 35. Iss. 4. P. 634-638.
14. Kirsanov M.N., Klyushnikov V.D. Singular points of deformation process and creep buckling of a cylindrical shell // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1994. Vol. 35. Iss. 5. P. 761-769.
15. Kirsanov M.N., Sporykhin A.N. Instability of a spherical body under uniform loading // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1979. Vol. 20. Iss. 1. P. 123-126.
16. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.: МЭИ, 2011. 208 с.