DOI: 10.17117/na.2016.06.02.202

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.202.pdf>

Поступила (Received): 11.06.2016

Бойко О.О. Анализ стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple

Boyko O.O.
The analysis of the stability of nonlinear ordinary
differential equations of the second order system Maple

Используя общую теорию стабильности дифференциальных уравнений, найдено решение этой задачи для частного вида уравнения. Получено условие, при котором связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, вырождается. Использована система компьютерной математики Maple
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

Using the General stability theory of differential equations, the solution of this problem for a particular type of equation is obtained. The resulting condition under which the correlation between the variations of the derivatives of different orders that satisfy the original differential equation degenerates are detected. The system of computer mathematics Maple is used
Key words: differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

Бойко Олег Олегович
Студент
Национальный исследовательский университет
«МЭИ»
г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Boyko Oleg Olegovich
Student
National research university "MPEI"
Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория стабильности дифференциальных уравнений, предложенная в [1-3], имеет приложение в задачах резания металлов [4-6], в задаче о заклинивании поршня [7]. Теория основана на особенностях начальной задачи, замеченных ранее в задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14] и задаче о распределении напряжений в упругом теле [15]. Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого процесса

$$ax_t^2 + cx + bx_{tt} = 0, \quad (1)$$

где a и b – константы. Производные по времени обозначены как: $x_t = dx(t)/dt$, $x_{tt} = d^2x(t)/dt^2$. Определим точку неустойчивости порядка (0/3) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$2ax_t\Delta x_t + c\Delta x + b\Delta x_{tt} = 0. \quad (2)$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции $x(t)$ в уравнение должны входить эти величины. Если

вторая производная в уравнение входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$2ax_t \Delta x_{tt} + (2ax_{tt} + c) \Delta x_t + b \Delta x_{ttt} = 0 \quad (3)$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости (0/3), производные соответствующего порядка от приращений Δx и $\Delta \ddot{x}$ задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) выразить приращения первой и второй производной функции через Δx и $\Delta \ddot{x}$. Запишем эту систему в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} 2ax_t & b \\ 2ax_{tt} + c & 2ax_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta x_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

где правые части, содержащие приращение функции Δx и ее третьей производной $\Delta \ddot{x}$, обозначения как α_1 и α_2 . От значений этих величин решение задачи устойчивости не зависит, главное, что они не нулевые. Равенство определителя нулю означает вырождение связи между производными. Иными словами, если определитель равен нулю, то по таким обобщенным начальным условиям задачу поставить нельзя. К классической начальной задаче она не сводится. Приравнявая определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3): $4a^2 x_t^2 - b(2ax_{tt} + c) = 0$. Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения: $x_{tt} = -(ax_t^2 + x) / b$. В результате получаем условие неустойчивости $4a^2 x_t^2 - b(2a(-(ax_t^2 + x) / b) + c) = 0$. Так как в это условие входит и функция и ее производная, то неустойчивость зависит от их сочетания.

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [15,16]. Приведем соответствующие операторы:

```
> s:=diff(dx(t),t)=-
(a*dx(t)^2+c*x(t))/b,diff(x(t),t)=dx(t);
> f:={x(t),dx(t)}:
> inc1:=x(0)=0,dx(0)=1:
> inc2:=x(0)=0,dx(0)=2:
> inc3:=x(0)=0,dx(0)=3:
> fn1:=dsolve({s,inc1},f,numeric,output=listprocedure):
> fn2:=dsolve({s,inc2},f,numeric,output=listprocedure):
> fn3:=dsolve({s,inc3},f,numeric,output=listprocedure):
> X1:=subs(fn1,x(t)):
> X2:=subs(fn2,x(t)):
> X3:=subs(fn3,x(t)):
> plot([X1,X2,X3],0..6,color=[red,blue,black]);
```

В решении использована форма Коши дифференциального уравнения, производная функции обозначена $dx(t)$. Для численного решения используется опция **numeric** оператора **dsolve** решения дифференциального уравнения [15]. Начальные значения записаны в отдельные переменные **inc1**, **inc2**, **inc3**, отличающиеся только начальной скоростью. Все три решения выводятся на печать оператором **plot**.

Рис. 1. Численное решение (1) при условии $a = 6$, $b = 7$, $c = 1$ и начальных условиях: $x(0) = 0$, 1) $x_t(0) = 1$, 2) $x_t(0) = 2$, 3) $x_t(0) = 3$

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // Известия вузов. Строительство. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М, 2015. 184 с.
10. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.
11. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33, No. 4. P. 573-576.
12. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.
13. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
14. Кирсанов М.Н. Неустойчивость распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
15. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
16. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.