DOI: 10.17117/na.2016.06.02.194

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.194.pdf>

Поступила (Received): 17.06.2016

Бадертдинов Р.Р.
О стабильности нелинейного обыкновенного
дифференциального уравнения второго
порядка в системе Maple

Badertdinov R.R.
On the constancy of nonlinear ordinary differential
equation of the second order in system Maple

Найдено условие, при котором вырождается связь между малыми приращениями производных различных порядков функции, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению.

Методами системы компьютерной математики Maple с применением оператора dsolve получено численное решение начальной задачи

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

The condition in which degenerates the relationship between small increments and derivatives of different orders of a function that satisfies the original differential equation are detected. By the methods of computer algebra system Maple and using the dsolve operator the numerical solution of the initial problem is obtained

Key words: differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

Бадертдинов Руслан Ринатович

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Badertdinov Ruslan Rinatovich

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1-3] предложена теория стабильности дифференциальных уравнений. Практика подтвердила достоверность ее положений в задачах обработки металлов [4-6], заклинивании элементов пневматики [7] и задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14]. Теория имеет приложения и для уравнений в частных производных [15].

Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого динамического процесса с силами вязкого сопротивления и некоторыми нелинейными воздействиями

$$a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + cx^2 = 0, \quad (1)$$

где a , b и c – константы задачи. Определим точку неустойчивости порядка (1/2) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$ax\Delta\ddot{x} + a\ddot{x}\Delta x + 2b\dot{x}\Delta\dot{x} + 2cx\Delta x = 0. \quad (2)$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$(a + 2b)(\ddot{x}\Delta\dot{x} + \dot{x}\Delta\ddot{x}) + \Delta x(a\ddot{x} + 2c\dot{x}) + x(a\Delta\ddot{x} + 2c\Delta\dot{x}) = 0. \quad (3)$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости, величины $\Delta\dot{x}$ и $\Delta\ddot{x}$ задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) найти приращение функции Δx и ее третьей производной $\Delta\ddot{x}$. Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a\ddot{x} + 2cx & 0 \\ a\ddot{x} + 2c\dot{x} & ax \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\alpha_1 = -2b\dot{x}\Delta\dot{x} - ax\Delta\ddot{x}$, $\alpha_2 = -(a + 2b)(\ddot{x}\Delta\dot{x} + \dot{x}\Delta\ddot{x}) - 2cx\Delta\dot{x}$. Равенство нулю определителя означает вырождение связи между производными. Если определитель равен нулю, то по обобщенным условиям на первую и вторую производную начальную задачу поставить нельзя. Это и есть появление неустойчивости уравнения. Следует заметить, что с решением уравнения эта постановка никак не связана. Неустойчивость может привести к каким-либо заметным последствиям, если на процесс воздействовать возмущением определенного вида в момент, соответствующий условиям неустойчивости (обращению определителя системы (4) в нуль). Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (1/2): $(a\ddot{x} + 2cx)ax = 0$. Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения: $\ddot{x} = -(b\dot{x}^2 + cx^2) / (ax)$. В результате получаем условие $(2cx^2 - b\dot{x}^2 - cx^2)ax = 0$. Очевидно, что одним из условий неустойчивости порядка (1/2) является равенство $x = 0$ при любом значении скорости функции. На рисунке 1 построены кривые зависимости точек неустойчивости от коэффициента b при $\dot{x}(0) = 3$. На рисунке 2 построен 3d график, моделирующий зависимость x в условии неустойчивости от коэффициентов b и c при $\dot{x}(0) = 3$.

Рис. 1

Рис. 2

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное решение можно получить с помощью Maple [16]. Приведем соответствующие операторы и графики решения дифференциального уравнения на рисунке 3:

```
> s:=diff(dx(t),t)=(-2*dx(t)^2-x(t)^2)/(3*x(t)), diff(x(t),t)=dx(t);
> f:={x(t),dx(t)}: #Функция и ее производная
> inc1:=x(0)=10,dx(0)=60:#Три разные начальные условия
> inc2:=x(0)=60,dx(0)=30:
```

```
> inc3:=x(0)=140,dx(0)=1:
> fn1:=dsolve({s,inc1},f,numeric,output=listprocedure):
> fn2:=dsolve({s,inc2},f,numeric,output=listprocedure):
> fn3:=dsolve({s,inc3},f,numeric,output=listprocedure):
> X1:=subs(fn1,x(t)): X2:=subs(fn2,x(t)): X3:=subs(fn3,x(t)):
> plot([X1,X2,X3],0..5,color=[red,blue,black],thickness=2);
```

Рис. 3. Численное решение (1)

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Определение, свойства и приложения одного нелинейного дифференциального оператора // Филология и культура. 2010. № 22. С. 43-48.
4. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
5. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
6. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Часть 1. Стержни: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2015. 184 с.
10. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. P. 221-227.
11. Кирсанов М.Н. О влиянии выбора критерия неустойчивости при ползучести на решение задачи оптимизации стержневых конструкций // Прикладная механика и техническая физика. 1992. №4. С. 107-110.
12. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.
13. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.

14. Кирсанов М.Н. О реакции сжатого стержня на возмущения высших производных прогиба в условиях ползучести // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 1. С. 43-47.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
16. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512

© 2016, Бадертдинов Р.Р.

*О стабильности нелинейного обыкновенного
дифференциального уравнения второго порядка в
системе Maple*

© 2016, Badertdinov R.R.

*On the constancy of nonlinear ordinary differential
equation of the second order in system Maple*