DOI: 10.17117/na.2016.05.03.232

<http://ucom.ru/doc/na.2016.05.03.232.pdf>

Поступила (Received): 11.05.2016

Сайпулаев Г.Р.
Анализ стабильности и решение нелинейного
обыкновенного дифференциального
уравнения в системе Maple

Saypulaev G.R.
Stability analysis and solution of nonlinear ordinary
differential equation in system Maple

На основе теории неустойчивости найдено условие, при котором связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, вырождается. Методами системы компьютерной математики Maple с применением оператора dsolve получено численное решение начальной задачи

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

Сайпулаев Гасан Русланович

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Based on the theory of constancy, the condition under which the correlation between the variations of the derivatives of different orders that satisfy the original differential equation degenerates was found. Methods of computer algebra system Maple using the dsolve operator the numerical solution of the initial problem is obtained

Key words: differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

Saypulaev Gasan Ruslanovich

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория стабильности дифференциальных уравнений, предложенная в [1-3], имеет приложение в задачах резания металлов [4-6], в задаче о заклинивании поршня [7]. Теория основана на особенностях начальной задачи, замеченных ранее в задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14] и задаче о распределении напряжений в упругом теле [15]. Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого процесса

$$a\ddot{x} + b\dot{x}^2 - cx\dot{x} = 0, \quad (1)$$

где a и b – произвольные вещественные константы. Производные по времени обозначены как : $\dot{x} = dx(t) / dt$, $\ddot{x} = d^2x(t) / dt^2$. Определим точку неустойчивости порядка (2/3) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$a\Delta\ddot{x} + b\dot{x}\Delta\dot{x} - cx\Delta\dot{x} - c\dot{x}\Delta x = 0 \quad (2)$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции $x(t)$ в уравнение должны входить эти величины. Если

вторая производная в уравнение входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\Delta\ddot{x} + b(\ddot{x}\Delta\dot{x} + \dot{x}\Delta\ddot{x}) - c\dot{x}\Delta\dot{x} - cx\Delta\ddot{x} - c\ddot{x}\Delta x - c\dot{x}\Delta\dot{x} = 0 \quad (3)$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости, величины $\Delta\ddot{x}$ и $\Delta\dot{x}$ задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) выразить приращение функции Δx и ее производной $\Delta\dot{x}$. Запишем систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -c\ddot{x} & b\ddot{x} - 2c\dot{x} \\ -c\dot{x} & b\dot{x} - cx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

где введены обозначения $\alpha_1 = -a\Delta\ddot{x} - (b\dot{x} - cx)\Delta\dot{x}$, $\alpha_2 = -a\Delta\dot{x}$. Отметим, что эти величины могут быть как угодно малыми (но не нулевыми!). Равенство определителя нулю означает вырождение связи между производными. Иными словами, если определитель равен нулю, то по таким обобщенным начальным условиям задачу поставить нельзя. К классической начальной задаче она не сводится. Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (2/3): $-c\ddot{x}(b\dot{x} - cx) + c\dot{x}(b\ddot{x} - 2c\dot{x}) = 0$. Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения: $\ddot{x} = (cx\dot{x} - b\dot{x}^2) / a$. В результате получаем условие $-c(cx\dot{x} - b\dot{x}^2)(b\dot{x} - cx) / a + c\dot{x}(b((cx\dot{x} - b\dot{x}^2) / a) - 2c\dot{x}) = 0$. Отсюда очевидно, что одним из условий неустойчивости является равенство $\dot{x} = 0$ при любом значении функции и времени. Другим, более сложным условием, является равенство $(b\dot{x} - cx)^2 / a + \dot{x}(b(cx - b\dot{x}) / a - 2c) = 0$. Так как в это условие входит и функция и ее производная, то неустойчивость зависит от их сочетания. На рисунке 1 построены соответствующие кривые.

Рис. 1. Условие неустойчивости

1) $a=8, b=8, c=3$; 2) $a=6, b=5, c=2$; 3) $a=4, b=2, c=1$

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [16]. Приведем соответствующие операторы:

```
> a:=4; b:=2; c:=1;
sys1:= diff(dx(t),t)=(x(t)*dx(t)-2*dx(t)^2)/4, diff(x(t),t)=dx(t);
funcs:={x(t),dx(t)}; InC:=x(0)=1,dx(0)=1;
FNUM:=dsolve({sys1,InC},funcs,numeric,output=listprocedure);
X:=subs(FNUM,x(t));
plot(X,-15..15,color=[red],thickness=2);
```

Рис. 2. Численное решение (1) при условии:
 $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // Известия вузов. Строительство. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариков М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариков М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ квазистатического критерия выпучивания стержня при ползучести // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 2016. С. 232-237.
10. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Ч. 1. М.: ИНФРА-М, 2015. 184 с.
11. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No. 3. P. 221-227.
12. Kirsanov M.N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33. No. 4. P. 573-576.

13. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.
14. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
16. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

© 2016, Сайпулаев Г.Р.

Анализ стабильности и решение нелинейного
обыкновенного дифференциального уравнения в
системе Maple

© 2016, Saypulaev G.R.

Stability analysis and solution of nonlinear ordinary
differential equation in system Maple