DOI: 10.17117/na.2016.05.03.205

<http://ucom.ru/doc/na.2016.05.03.205.pdf>

Поступила (Received): 28.05.2016

Коротков А.В. Золотое сечение в музыкальной гамме

Korotkov A.V.
The Golden section in musical scale

Статья посвящена анализу степенных рядов, использующих в музыкальной гамме достоинства Золотого сечения. Основания ряда и начальная частота кратны величине 1,61803398875, что характеризует Золотое сечение. Это приводит к стандартной частоте 435 Гц, соответствующей ноте «ля»- первой октавы. Совместное действие музыкальных инструментов, органов слуха человека и, соответствующее помещение могут создавать действие музыкального резонанса

Ключевые слова: Золотое сечение, мультипликативная группа, частоты звука

Коротков Анатолий Васильевич

Доктор физико-математических наук, кандидат технических наук, академик МАСИ, доцент
Шахтинский завод Гидропривод
г. Шахты, пер. Якутский, 2

The article is devoted to the analysis of power series, using the musical scale advantages of the Golden section. The base of the number and initial frequency of a multiple of the amount 1,61803398875 that characterizes the Golden ratio. This leads to the standard frequency of 435 Hz corresponding to the note "La" first octave. The combined effect of musical instruments, hearing and the relevant space can create the effect of musical resonance

Key words: Golden ratio, the multiplicative group, the frequency of the sound

Korotkov Anatoly Vasilyevich

Doctor of Physico-mathematical Sciences, Candidate of Technical Sciences, Academician of the MASI, Associate Professor
Shakhty factory Hidroprivod
Shakhty, Yakutsky lane, 2

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^{m-1} & 2^{n+1} \\ 2^{n+1} & 7-D & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^{n+1} & 15-D \end{vmatrix}$$

Степенными числами будем называть числа, составляющие множества целых степеней действительных чисел ..., a^{-n} , ..., a^{-1} , a^0 , a^1 , ..., a^n , Такие числа широко используются на практике в формировании параметрических рядов. Например, в таблице 1. приведен параметрический ряд, используемый в технике для формирования значений параметров различных устройств (диаметров резьб, объемов гидромашин, мощностей трансформаторов и прочих устройств).

Этот ряд характеризуется основанием, равным 10 и числом тактов, равным 10 или 20. Основание и число тактов, вообще говоря, произвольны. Характерно, что степенные ряды формируются путем умножения предыдущего значения на первое значение, т.е.

$$a^{n+1} = a^n \cdot a^1$$

подобно определению натурального ряда чисел. Вместе с тем, как и натуральный ряд чисел, степенной ряд можно определить следующим образом:

$$q^{n+1} = q^{2n} \cdot q^{n-1}.$$

Таблица 1

100	1,00000000000000000000000000000000...		
		112	1,1220184543019634355910389464779...
125	1,2589254117941672104239541063958...		
		140	1,4125375446227543021556078639302...
160	1,5848931924611134852021013733915...		
		180	1,7782794100389228012254211951927...
200	1,9952623149688796013524553967395...		
		224	2,2387211385683396119549508524657...
250	2,5118864315095801110850320677993...		
		280	2,8183829312644538191019236991551...
316	3,1622776601683793319988935444327...		
		355	3,5481338923357545843321870226449...
400	3,9810717055349725077025230508775...		
		450	4,4668359215096311855625052431938...
500	5,0118723362727228500155418688495...		
		560	5,6234132519034908039495103977648...
630	6,3095734448019324943436013662234...		
		710	7,0794578438413791080221494218931...
800	7,9432823472428150206591828283639...		
		900	8,912509381337455299531086810783...

Эта формула определяет рекуррентное соотношение для трех последовательных чисел степенного ряда.

Степенные числа составляют мультипликативную группу по умножению. Действие умножения в ней ассоциативно и коммутативно, существует единичный элемент $a^0=1$ и для каждого элемента a^n существует обратный элемент a^{-n} .

Свойства степенных чисел могут быть выведены из пяти аксиом, аналогичных аксиомам Пеано [1]:

1. есть натуральное число a^0 , равное 1;
2. для каждого степенного числа a^n существует единственное следующее за ним число a^{n+1} ;
3. $a^{n+1} \neq 1$;
4. из $a^n = a^m$ следует $n=m$;
5. имеет место принцип полной индукции.

Рассмотрим степенной ряд, соответствующий музыкальной гамме (таблица 2).

Здесь первый столбик характеризует числа, соответствующие нотам: до, ре, ми, фа, соль, ля, си, до, используемых в музыкальной гамме. Эти числа формируют три вида интервалов в октаве $9/8$, $10/9$, $16/15$. Наименьший интервал $16/15$ встречается между нотами ми и фа, а также си и до. В этих местах происходит замедление октавы. По отношению к музыкальной гамме в семь тонов считается, что между нотами до и ре, ре и ми, фа и соль, соль и ля, ля и си использованы пять промежуточных полутонов.

Таблица 2

[illegible]

Таким образом, музыкальная гамма семи тонов и пяти полутонов использует двенадцатитактную схему построения степенного ряда. В тоже время основание степенного ряда равно двум и частоты удваиваются через каждые двенадцать тактов, так что

$q^1=2^{1/12}.$

Надо отметить, что как видно из таблицы 2 двенадцатитактная гамма значительно точнее воспроизводит семитактную гамму, представленную в третьем столбике таблицы. Вместе с тем эта гамма не в полной мере отвечает степенным рядам, в связи с тем, что в качестве основных тонов использованы рациональные числа, формируемые отношением малых натуральных чисел.

Тоже самое можно сказать о основании степенного ряда равно двум. По крайней мере, при этом степень целого основания не совпадает с показателем в степени степенного ряда, причем этот показатель также равен целому числу. По-видимому, применение степенных рядов с иррациональными показателями в степени и основанием этих рядов могут дать значительное улучшение качество звучания музыкальных инструментов. Наиболее важный ряд с иррациональным основанием является ряд соответствующий Золотому сечению. Он характеризуется величиной

$$((1+5^{0,5})/2)^{(1/n)},$$

где величина n является целым числом. Использование этой величины равномерно-темперированного строя музыкальной гаммы соответствует значению n равного восьми, либо девяти одной из двух величин. При этом величина такта соответствует значениям 1,0619974, 1,0549232. Вторая величина весьма близка значению $2^{(1/12)}=1,059463094$. Вместе с тем использовать начальную частоту кратную Золотому сечению 1,61803398875 сужает верхнюю, нижнюю частоты в музыкальной гамме. Первая, из приведенных величин, определяющая размер такта 1,0619974. Подвергает сужение разности между верхней и нижней частотами, в меньшей степени, что определяет соответствующую таблицу частот см. ниже.

Все частоты равны значениям степени Золотого сечения, что показано в таблице для целых степеней 1,618034. Это относится ко всем частотам, основаниям и степеням величин. Очевидно, это обнадеживающее обстоятельство на

существенное улучшение качества звучания музыкальных инструментов, соответствие графику восприятия звука, соответствие графику отражения звуков в помещении и, как следствие возможность получения резонанса колебания звука, недостатки гаммы заключаются более сложным значением частот, а следовательно настройки музыкальных инструментов. Другим недостатком, является расширение диапазона частот в сторону снижения частоты (на два такта) и в сторону повышения частоты (также на два такта). Я полагаю, что улучшение качества звучания, вызванное сложением частот и их резонансом, в полной степени восполнит имеющиеся недостатки.

Отметим, что стандартная частота, соответствующая ноте «ля» первой октавы, определяется значением 57 ноты равному величине 434,9999 (примерно равному 435 Гц), как было в начале прошлого века. Отличие значение всех частот от использования в настоящее время составляет единицы процента.

Те же самые предпосылки, об использовании чисел золотого сечения, можно привести для параметрических рядов технических средств, что позволит уменьшить число используемых параметров и получить равномерно-распределенный ряд их значений.

	такт	ча- стота	степень	ок- тавы		такт	ча- стота	степень	ок- тавы	отнош.
a^0	1,0000 00	14,106 91	$1,618^0$	1,0000 00	a^{60}	36,932 38	521,00 19		6,0000 00	36,932 38
a^1	1,0619 97	14,981 51			a^{61}	39,222 09	553,30 27			36,932 38
a^2	1,1278 38	15,910 32			a^{62}	41,653 76	587,60 60			36,932 38
a^3	1,1977 62	16,896 72		14,106 91	a^{63}	44,236 19	624,03 61			36,932 38
a^4	1,2720 20	17,944 27		14,981 51	a^{64}	46,978 71	662,72 47	$1,618034^8$		36,932 38
a^5	1,3508 82	19,056 77		16,896 72	a^{65}	49,891 27	703,81 19			36,932 38
a^6	1,4346 33	20,238 24		...	a^{66}	52,984 40	747,44 64			36,932 38
a^7	1,5235 76	21,492 96		16064, 83	a^{67}	56,269 30	793,78 61			36,932 38
a^8	1,6180 34	22,825 47	$1,618034^1$	17060, 81	a^{68}	59,757 85	842,99 88			36,932 38
a^9	1,7183 48	24,240 59		18118, 54	a^{69}	63,462 68	895,26 26			36,932 38
a^1_0	1,8248 81	25,743 44			a^{70}	67,397 20	950,76 65			36,932 38
a^1_1	1,9380 19	27,339 47			a^{71}	71,575 65	1009,7 12			36,932 38
a^1_2	2,0581 71	29,034 44		2,0000 00	a^{72}	76,013 16	1072,3 11	$1,618034^9$	7,0000 00	76,013 16
a^1_3	2,1857 72	30,834 50			a^{73}	80,725 77	1138,7 92			76,013 16
a^1_4	2,3212 84	32,746 16			a^{74}	85,730 56	1209,3 94			76,013 16
a^1_5	2,4651 98	34,776 34			a^{75}	91,045 63	1284,3 73			76,013 16

	такт	ча- стота	степень	ок- тавы		такт	ча- стота	степень	ок- тавы	отнош.
a ¹ ₆	2,6180 34	36,932 38	1,618034 ^2		a ⁷⁶	96,690 23	1364,0 01			76,013 16
a ¹ ₇	2,7803 45	39,222 09			a ⁷⁷	102,68 48	1448,5 65			76,013 16
a ¹ ₈	2,9527 19	41,653 76			a ⁷⁸	109,05 10	1538,3 73			76,013 16
a ¹ ₉	3,1357 80	44,236 19			a ⁷⁹	115,81 18	1633,7 48			76,013 16
a ² ₀	3,3301 91	46,978 71			a ⁸⁰	122,99 19	1735,0 36	1,618034^ 10		76,013 16
a ² ₁	3,5366 54	49,891 27			a ⁸¹	130,61 70	1842,6 03			76,013 16
a ² ₂	3,7559 17	52,984 40			a ⁸²	138,71 50	1956,8 40			76,013 16
a ² ₃	3,9887 74	56,269 30			a ⁸³	147,31 49	2078,1 59			76,013 16
a ² ₄	4,2360 68	59,757 85	1,618034 ^3	3,0000 00	a ⁸⁴	156,44 81	2207,0 00		8,0000 00	156,44 81
a ² ₅	4,4986 93	63,462 68			a ⁸⁵	166,14 74	2343,8 28			156,44 81
a ² ₆	4,7776 00	67,397 20			a ⁸⁶	176,44 82	2489,1 39			156,44 81
a ² ₇	5,0737 99	71,575 65			a ⁸⁷	187,38 75	2643,4 59			156,44 81
a ² ₈	5,3883 62	76,013 16			a ⁸⁸	199,00 50	2807,3 47	1,618034^ 11		156,44 81
a ² ₉	5,7224 26	80,725 77			a ⁸⁹	211,34 28	2981,3 95			156,44 81
a ³ ₀	6,0772 02	85,730 56			a ⁹⁰	224,44 55	3166,2 34			156,44 81
a ³ ₁	6,4539 72	91,045 63			a ⁹¹	238,36 06	3362,5 32			156,44 81
a ³ ₂	6,8541 02	96,690 23	1,618034 ^4		a ⁹²	253,13 83	3571,0 00			156,44 81
a ³ ₃	7,2790 38	102,68 48			a ⁹³	268,83 22	3792,3 93			156,44 81
a ³ ₄	7,7303 20	109,05 10			a ⁹⁴	285,49 91	4027,5 12			156,44 81
a ³ ₅	8,2095 80	115,81 18			a ⁹⁵	303,19 93	4277,2 07			156,44 81
a ³ ₆	8,7185 52	122,99 19		4,0000 00	a ⁹⁶	321,99 69	4542,3 83	1,618034^ 12	9,0000 00	321,99 69
a ³ ₇	9,2590 80	130,61 70			a ⁹⁷	341,95 99	4823,9 98			321,99 69
a ³ ₈	9,8331 19	138,71 50			a ⁹⁸	363,16 05	5123,0 74			321,99 69
a ³ ₉	10,442 75	147,31 49			a ⁹⁹	385,67 55	5440,6 91			321,99 69
a ⁴ ₀	11,090 17	156,44 81	1,618034 ^5		a ¹⁰⁰	409,58 64	5778,0 00			321,99 69
a ⁴ ₁	11,777 73	166,14 74			a ¹⁰¹	434,97 97	6136,2 21			321,99 69
a ⁴ ₂	12,507 92	176,44 82			a ¹⁰²	461,94 73	6516,6 51			321,99 69

	такт	ча- стота	степень	ок- тавы		такт	ча- стота	степень	ок- тавы	отнош.
a^4_3	13,283 38	187,38 75			a^{10}_3	490,58 68	6920,6 66			321,99 69
a^4_4	14,106 91	199,00 50			a^{10}_4	521,00 19	7349,7 29	1,618034^ 13		321,99 69
a^4_5	14,981 51	211,34 28			a^{10}_5	553,30 27	7805,3 93			321,99 69
a^4_6	15,910 32	224,44 55			a^{10}_6	587,60 60	8289,3 08			321,99 69
a^4_7	16,896 72	238,36 06			a^{10}_7	624,03 61	8803,2 23			321,99 69
a^4_8	17,944 27	253,13 83	1,618034 ^6	5,0000 00	a^{10}_8	662,72 47	9349,0 00		10,000 00	662,72 47
a^4_9	19,056 77	268,83 22			a^{10}_9	703,81 19	9928,6 14			662,72 47
a^5_0	20,238 24	285,49 91			a^{11}_0	747,44 64	10544, 16			662,72 47
a^5_1	21,492 96	303,19 93			a^{11}_1	793,78 61	11197, 87			662,72 47
a^5_2	22,825 47	321,99 69			a^{11}_2	842,99 88	11892, 11	1,618034^ 14		662,72 47
a^5_3	24,240 59	341,95 99			a^{11}_3	895,26 26	12629, 39			662,72 47
a^5_4	25,743 44	363,16 05			a^{11}_4	950,76 65	13412, 38			662,72 47
a^5_5	27,339 47	385,67 55			a^{11}_5	1009,7 12	14243, 91			662,72 47
a^5_6	29,034 44	409,58 64	1,618034 ^7		a^{11}_6	1072,3 11	15127, 00			662,72 47
a^5_7	30,834 50	434,97 97			a^{11}_7	1138,7 92	16064, 83			662,72 47
a^5_8	32,746 16	461,94 73			a^{11}_8	1209,3 94	17060, 81			662,72 47
a^5_9	34,776 34	490,58 68			a^{11}_9	1284,3 73	18118, 54			662,72 47

Список используемых источников:

1. Корн Г.К., Корн Т.К. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.
2. Порвенков В.Г. Акустика и настройка музыкальных инструментов. Москва, 1990.

© 2016, Коротков А.В.

Золотое сечение в музыкальной гамме

© 2016, Korotkov A.V.

The Golden section in musical scale