DOI: 10.17117/na.2016.05.03.201

<http://ucom.ru/doc/na.2016.05.03.201.pdf>

Поступила (Received): 30.05.2016

Иванычев Д.А., Бузина О.П. Исследование равновесия упругого анизотропного тела вращения

Ivanychev D.A., Buzina O.P.
Equilibrium study anisotropic elastic body of revolution

Метод граничных состояний применен для решения задач анизотропной упругости. Разработана идеология, выполнено решение осесимметричной пространственной задачи для цилиндра из трансверсально-изотропного материала

Ключевые слова: анизотропия, упругость, цилиндр

The method of boundary states applied to solve problems of anisotropic elasticity. Developed an ideology, a decision is made rotationally symmetric three-dimensional problem for a cylinder of transversely isotropic material

Key words: anisotropy, elasticity, cylinder

Иванычев Дмитрий Алексеевич

Кандидат физико-математических наук, доцент
Липецкий государственный технический
университет
г. Липецк, ул. Московская, 30

Ivanychev Dmitriy Alekseyevich

Associate Professor
Lipetsk state technical university
Lipetsk, Moscow st., 30

Бузина Ольга Петровна

Кандидат физико-математических наук, доцент
Липецкий государственный технический
университет
г. Липецк, ул. Московская, 30

Buzina Olga Petrovna

Associate Professor
Lipetsk state technical university
Lipetsk, Moscow st., 30

Эффективность МГС в задачах статики изотропных тел определена рядом присущих методу черт [1]:

1) исходный базис пространства состояний строится для класса топологически эквивалентных тел: ограниченных односвязных, неограниченных односвязных, двусвязных и т.п.;

2) «тело в смысле МГС», под которым понимается ортонормированный базис внутренних состояний, строится однократно, и может использоваться для решения различных краевых задач;

3) в случае основных задач «скелет» задачи представляет собой единичную матрицу, и решение сводится к рутинному вычислению квадратур;

4) граничные условия содержатся в результирующем граничном состоянии, что служит основой проверки адекватности решения;

5) решение имеет аналитическую форму, что позволяет легко проводить анализ.

В решении задачи рассматривалось упругое равновесие тела вращения под действием осесимметричной нагрузки. Тело из трансверсально-изотропного материала (в каждой точке тела имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к некоторой оси); плоскости изотропии перпендикулярны оси вращения.

Методом интегральных наложений [2] показано, что всякому пространственному напряженному состоянию соответствует некоторые вспомогательные двумерные состояния. В случае осесимметричной задачи для тела вращения вспомогательное плоское состояние только одно (меридиональное сечение), компоненты которого даются формулами [2]:

$$\sigma_z^{pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_1^2 \varphi_1'(\zeta_1) + \gamma_2^2 \varphi_2'(\zeta_2)],$$

$$\sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\varphi_1'(\zeta_1) + \varphi_2'(\zeta_2)],$$

$$\sigma_{zy}^{pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_1 \varphi_1'(\zeta_1) + \gamma_2 \varphi_2'(\zeta_2)],$$

$$\sigma_\eta^{pl} = \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl},$$

$$u_z^{pl} = \operatorname{Re}[p_1 \varphi_1(\zeta_1) + p_2 \varphi_2(\zeta_2)],$$

$$u_z^{pl} = \operatorname{Re}[iq_1 \varphi_1(\zeta_1) + iq_2 \varphi_2(\zeta_2)],$$

где константы q_1 и p_1 определены упругими параметрами материала, $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни характеристического уравнения, функции $\varphi_j(\zeta_j)$ – аналитические по своим переменным.

Переход к пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по формулам:

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta},$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy,$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy,$$

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad v = 0.$$

Внутреннее состояние в методе граничных состояний определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений: $\xi = \{\{u, v, w\}, \{\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{zr}, \varepsilon_{z\theta}, \varepsilon_{r\theta}\}, \{\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{zr}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{r\theta}\}\}$. Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для аналитических функций. Для ограниченного односвязного сечения можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^k \end{pmatrix} : k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний можно определить через внутреннюю энергию упругого деформирования

$$(\xi_1, \xi_2)_\Xi = \int_D (\sigma_z^1 \varepsilon_z^2 + \sigma_r^1 \varepsilon_r^2 + 2\sigma_{zr}^1 \varepsilon_{zr}^2 + 2\sigma_{z\theta}^1 \varepsilon_{z\theta}^2 + 2\sigma_{r\theta}^1 \varepsilon_{r\theta}^2) ds.$$

На границе тела напряжения оставляют «след» в виде поверхностных усилий p_z, p_r , которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние $\gamma = \{u, v\}, \{p_z, p_r\}$. В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу внешних сил:

$$(\gamma_1, \gamma_2)_\Gamma = \int_{\partial D} (p_z^1 u_z^2 + p_r^1 u_r^2) dl.$$

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений оба пространства Ξ, Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий; в общем случае проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомых состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса, но в случаях первой и второй основных задач сводится к рутинному вычислению определенных интегралов. Соответственно, при заданных на границе перемещениях u_{z0}, u_{r0} либо усилиях p_{z0}, p_{r0} коэффициенты Фурье рассчитываются так: $c_j = \int_{\partial D} (p_z^j u_{z0} + p_r^j u_{r0}) dl$, $c_j = \int_{\partial D} (p_{z0} u_z^j + p_{r0} u_r^j) dl$.

В качестве примера решения задачи рассмотрен цилиндр из трансверсально-изотропного материала. На боковой поверхности (рис.1) заданы перемещения (рис. представлен в плоскости меридионального сечения).

Рис. 1. Граничные условия второй основной задачи о нагружении цилиндра

На рис. 2. приведены изолинии компонент различных механических характеристик.

Рис. 2. Изолинии: а – компоненты вектора перемещения u , б – компоненты вектора перемещения w , в – вектора перемещения U , г – компоненты напряжения σ_{rr} , д – компоненты напряжения σ_{zz} , е – компоненты напряжения σ_{zr}

Тест граничных условий показал абсолютное совпадение заданных усилий с найденными.

Список используемых источников:

1. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. №2. С.115-137.
2. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.