DOI: 10.17117/na.2016.04.03.244

Поступила (Received): 02.04.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.04.03.244.pdf>

Григорян М.Р. Раскраски плоских диаграмм узлов

Grigoryan M.R.
Coloring flat diagrams of nodes

В статье представлены основные определения понятий теории узлов. На тривиальных примерах показаны правильные раскраски узлов. Также продемонстрировано применения инварианта раскрасок для узлов

Ключевые слова: узлы, плоские диаграммы, перекрёсток, дуга, раскраска узлов

Григорян Мариам Романовна

Студент

Армавирский государственный педагогический университет

г. Армавир, ул. Розы Люксембург, 159

The article presents the main definitions of the theory of knots. In the trivial examples show the correct coloring of nodes. Also demonstrated the use of colorings invariant for knots

Key words: nodes, flat charts, the intersection, the arc, coloring nodes

Grigoryan Mariam Romanovna

Student

Armavir state pedagogical university

Armavir, Rosa Luxemburg st., 159

Узел в математике (в теории узлов) определяется следующим образом: под узлом мы понимаем гладкое вложение окружности S^1 в ориентированное пространство R^3 (или сферу S^3); узлом также называют образ этого отображения. [1, с.4]

На интуитивном уровне под узлом будем понимать верёвку в трёхмерном пространстве, концы которой соединены. (рис.1)

Рис. 1

Простейший (т.е. незапутанный) узел, показанный на рисунке 2, будем называть тривиальным узлом.

Рис. 2

Но существуют также и запутанные, т.е. нетривиальные узлы, которые нельзя распутать не разрывая и не склеивая верёвку. На рисунке 3 изображены восьмёрка, левый трилистник и правый трилистник соответственно.

Рис. 3

Если задан узел, то его можно «шевелить» (производить изотопию), двигая его в трехмерном пространстве, при этом не разрывая и не склеивая веревку ни в каких точках (в том числе и не разводя концы). (рис.4)

Рис. 4

Возникает естественный вопрос (главный в теории узлов): как по двум заданным узлам понять, изотопны они или нет. Иными словами, можно ли один из них непрерывно продеформировать в другой. Частным случаем является вопрос о распознавании тривиальности того или иного узла то есть о том, является ли заданный узел изотопным тривиальному узлу (то есть можно ли его развязать). Это непосредственно связано с раскрасками узлов.

Рис. 5

Прежде чем пытаться развязывать или раскрасить узлы, нужно придумать разумный способ их задания (описывать узел параметрическим вложением окружности в трехмерное пространство очень неудобно). Для этого используем понятие плоской диаграммы узла, т.е. изображение узла на плоскости. На рисунке 5 изображена проекция узла на плоскость.

Определим локальную структуру перекрестка, причём ветвь, проходящая выше образует переход, а ветвь, проходящая снизу проход. (рис.6)

Рис. 6

Но чтобы полноценно перейти к раскраскам необходимо знать, что же нам нужно раскрашивать? Для этого дадим определение дуги. Назовем дугой зацепления часть кривой на плоской диаграмме зацепления, идущую все время сверху при прохождении перекрестков (иными словами, идущую от одного прохода до следующего, по ходу образуя лишь переходы). Так, у простейшей диаграммы правого трилистника, таких дуг три (рис. 7). Каждый перекрёсток инцидентен трём дугам. Будем сопоставлять дугам диаграммы цвета: красный, синий, зелёный. Каждое такое сопоставление будем называть раскраской.

Рис. 7

Рис. 8

Какую же раскраску считать правильной? Дадим определение: раскраска диаграммы зацепления называется правильной, если в каждом перекрёстке

диаграммы три дуги инцидентные этому перекрёстку покрашены все в один цвет, либо в три разных цвета. На рисунке 8.2 изображена правильная раскраска.

Число правильных раскрасок назовём инвариантом раскрасок. Инвариант – термин, обозначающий нечто неизменяемое. Т.е. инвариант раскрасок – это число правильных раскрасок, определённое для каждого узла, одинаковую для эквивалентных узлов.

Определим инвариант раскрасок для тривиального узла и для трилистника. Инвариант раскрасок от тривиального узла равен трем (все раскраски одноцветные). (рис.9)

Рис. 9

Инвариант раскрасок от трилистника (как правого, так и левого) – девяти (помимо одноцветных раскрасок существуют раскраски трех дуг в три разных цвета – всего $3! = 6$). Следовательно, ни один из трилистников не является тривиальным узлом. На рисунке 10 изображена раскраска левого трилистника, для правого аналогично.

Рис. 10

С помощью инварианта узла можно определить является ли узел тривиальным. Однако мы видим, что этот инвариант не отличает правый трилистник от левого. Это побуждает нас искать более сильный инвариант.

Список используемых источников:

1. Мантуров В.О. Теория узлов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. С. 512.