DOI: 10.17117/na.2016.04.03.148

<http://ucom.ru/doc/na.2016.04.03.148.pdf>

Поступила (Received): 24.04.2016

Петров В.Ф. Математическая модель линейного асинхронного двигателя с индуктором конечной ширины

Petrov V.F. Mathematical model of linear induction motor with inductor of finite width

Предлагается математическая модель линейного асинхронного двигателя. Модель представляет собой краевую задачу относительно функции тока для плотности индуцированных в электропроводящей полосе токов. Краевая задача допускает решение, с помощью которого легко рассчитать электромагнитное поле в проводящей пластине

Ключевые слова: линейный асинхронный двигатель, электропроводящая полоса, бегущее электромагнитное поле

A mathematical model of the linear induction motor is described. The model is a boundary value problem with respect to current density functions for induced currents in the conductive strip. A boundary value problem has a solution with which we can easily calculate the electromagnetic field in the conducting plate

Key words: linear induction motor, the electrically conductive strip, running an electromagnetic field

Петров Василий Федорович

Кандидат технических наук, доцент
Южно-Российский государственный
политехнический университет им. М.И. Платова
г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

Petrov Vasiliy Fedorovich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
South-Russian state polytechnic university named
M.I. Platov
Novocherkassk, Prosvescheniya st., 132

Рассмотрим движение электропроводящей полосы (ЭП) в бегущем магнитном поле, источником которого является трехфазная обмотка токов, уложенная в пазы плоского двухстороннего индуктора конечной ширины линейного асинхронного двигателя (ЛАД). Электромагнитное поле в ЭП описывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{B} &= \mu_0 \bar{\delta}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}; \\ \bar{\delta} &= \gamma \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + [\bar{V}, \bar{B}] \right); \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{A} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{B}$ – вектор магнитной индукции результирующего магнитного поля;
 $\bar{E}$ – вектор напряженности результирующего магнитного поля; $\bar{\delta}$ – вектор

плотности индуцированных в ЭП токов; $\bar{V} = u\bar{e}_x$, $u = \text{const}$ – вектор скорости движущегося ЭП; $\bar{A}$ – векторный магнитный потенциал результирующего магнитного поля; φ – скалярный потенциал электрического поля.

Будем считать, что токи обмоток индуктора и все величины электромагнитного поля в зазоре ЛАД изменяются по синусоидальному закону во времени. Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\bar{B}} &= \mu_0 \dot{\bar{\delta}}; \text{rot } \dot{\bar{E}} = \frac{\partial \dot{\bar{B}}}{\partial t}; \text{div } \dot{\bar{B}} = 0; \\ \dot{\bar{\delta}} &= \gamma \left(-j\omega \bar{A} \text{ grad } \varphi + [\bar{V}, \dot{\bar{B}}] \right); \\ \dot{\bar{B}} &= \text{rot } \dot{\bar{A}}; \text{div } \dot{\bar{A}} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь точками отмечены комплексы соответствующих функций времени, $j = \sqrt{-1}$, ω – круговая частота магнитного поля индуктора.

Примем следующие допущения: ширина индуктора много больше ширины ЭП; магнитная проницаемость индуктора $\mu = \infty$; проводимость $\gamma = 0$; поле индуктора в пустом зазоре $\dot{\bar{B}}^0$ известно и имеет вид

$$\dot{\bar{B}}^0(x, y) = \dot{B}_x^0(x, y)\bar{e}_x + \dot{B}_y^0(x, y)\bar{e}_z.$$

Принятые допущения позволяют считать поле в зазоре индуктора плоскопараллельным и независимым от поперечной координаты z .

Представим поле $\dot{\bar{B}}$ в виде $\dot{\bar{B}} = \dot{\bar{B}}^0 + \dot{\bar{B}}'$, $\text{rot } \dot{\bar{B}}^0 = 0$, $\dot{\bar{B}}'$ – поле индуцированных в ЭП токов. К системе уравнений (1) необходимо добавить граничные условия:

$$\dot{\bar{B}}'_x(x, \pm h, z) = 0, \dot{\bar{B}}'_y(x, \pm h, z) = 0, \dot{\bar{\delta}}_y(x, \pm h, z) = 0. \quad (3)$$

Здесь h – полувысота ЭП.

Первое уравнение системы (2), с учетом граничных условий (3), можно записать в координатной форме:

$$\frac{\partial \dot{B}'_x}{\partial y} - \frac{\partial \dot{B}'_y}{\partial z} = \mu_0 \dot{\delta}_x; \quad \frac{\partial \dot{B}'_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{B}'_x}{\partial y} = \mu_0 \dot{\delta}_z.$$

Усредним эти уравнения по высоте ЭП (пренебрегаем толщинным эффектом) по правилу:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x, y, z) dy = \langle f(x, z) \rangle.$$

В результате усреднения (знак усреднения $\langle \dots \rangle$ в дальнейшем опускаем) с учетом граничных условий (3) получаем:

$$\frac{\partial \dot{B}_y}{\partial z} = -\mu_0 \dot{\delta}_x; \quad \frac{\partial \dot{B}_x}{\partial x} = \mu_0 \dot{\delta}_z.$$

Усредним уравнение $\text{div } \dot{\bar{\delta}} = 0$ и учтем граничное условие (3). Получим

$$\frac{\partial \dot{\delta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\delta}_z}{\partial z} = 0.$$

Последнее равенство позволяет ввести функцию тока ψ по правилу:

$$\mu_0 \dot{\delta}_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \mu_0 \dot{\delta}_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Усредняя проекцию вектора $\text{rot } \dot{\delta}$ на ось y , для функции тока ψ , получаем уравнение:

$$\Delta \psi - \gamma \mu_0 u \frac{\partial \psi}{\partial y} - j \mu_0 \gamma \omega \psi = \dot{F}; \quad (5)$$

$$\dot{F} = \gamma u \frac{\partial \dot{B}_y^0}{\partial x} + j \gamma \omega \dot{B}_x^0.$$

При этом функции $\psi(x, z)$ удовлетворяет дополнительными условиями:

$$\psi(x, \pm a) = 0, \quad \psi(\pm \infty, z) = 0, \quad (6)$$

где a – полуширина ЭП.

К краевой задаче (5), (6) применим преобразование Фурье [1, с. 311]:

$$\varphi_m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z) e^{jmx} dx,$$

где m – параметр преобразования Фурье.

Тогда уравнение (4) принимает вид

$$\frac{d^2 \psi_m}{dz^2} - [m^2 - j \mu_0 \gamma (mu - \omega)] \psi_m = \dot{F}_m,$$

или в относительных единицах

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} - [m^2 - j \text{Re}_m (\alpha^2 - \alpha(1-s)m)] \psi_m = \dot{F}_m; \quad (7)$$

$$\dot{F}_m = j \text{Re}_m [\alpha^2 - \alpha(1-s)m] \frac{\dot{B}_m^0}{\mu_0}.$$

Здесь $\text{Re}_m = \frac{\gamma \mu_0 \omega}{\alpha^2}$ – магнитное число Рейнольдса; $\alpha = \frac{\pi}{\tau}$, τ – полюсное деление; s – скольжение.

Граничные условия (6) принимают вид

$$\psi_m(\pm a) = 0. \quad (8)$$

Решение краевой задачи (7), (8) является функция

$$\psi_m(z) = \frac{\dot{F}_m}{p} \left(\frac{ch \sqrt{pz}}{ch \sqrt{pa}} - 1 \right), \quad (9)$$

$$p = m^2 + j \text{Re}_m [\alpha^2 - \alpha(1-s)m].$$

Применяя к функции $\psi_m(z)$ обратное преобразование Фурье, получим

$$\psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(z) e^{jmx} dm$$

и

$$\dot{\delta}_x(x, z) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \dot{\delta}_z(x, z) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10)$$

В качестве примера на рис. 1 показано распределение модуля плотности z -составляющей $\dot{\delta}_z(x, 0)$ вдоль индуктора при $\text{Re}_m = 1,62$.

Рис. 1. Распределение модуля плотности индуцированных токов вдоль индуктора при синусоидальной нагрузке: 1 – $S = 0,1$; 2 – $S = 0,2$; 3 – $S = 0,3$

В качестве расчетной модели индуктора ЛАД был выбран индуктор с гладкими, лишенными пазов магнитопроводами бесконечной протяженности. Первичная токовая нагрузка индуктора задавалась в виде бесконечно тонких токовых слоев конечной длины $l = 2\pi t$ на гладких, обращенных к зазору поверхностях магнитопроводов с заданной линейной плотностью $\dot{\sigma}(x) = \sigma_0 e^{-j\alpha x}$, σ_0 – амплитуда плотности тока (рис. 2).

Рис. 2. Сечение ЛАД плоскостью $z = \text{const}$

Поле такого индуктора определяется формулой

$$\dot{B}_y^0(x_M) = -\frac{\mu_0}{\pi} \int_0^l \dot{\sigma}(x_N) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_N - x_M}{(x_N - x_M)^2 + [(2i-1)\Delta - y_M]^2} + \frac{x_N - x_M}{(x_N - x_M)^2 + [(2i-1)\Delta + y_M]^2} \right),$$

где Δ – полувысота намагниченного зазора индуктора.

Список используемых источников:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 464 с.

© 2016, Петров В.Ф.

Математическая модель линейного асинхронного двигателя с индуктором конечной ширины

© 2016, Petrov V.F.

Mathematical model of linear induction motor with inductor of finite width