DOI: 10.17117/na.2016.04.02.313

<http://ucom.ru/doc/na.2016.04.02.313.pdf>

Поступила (Received): 24.04.2016

Чернобровкина И.И., Чернобровкина Ю.В. Элементы теории чисел в школьном курсе математики

Chernobrovkina I.I., Chernobrovkina Yu.V.
Elements of the theory of numbers in a school
course of mathematics

В статье речь пойдет о применении аппарата теории чисел в школьном курсе математики, а именно при подготовке к задачам олимпиадного типа, к задачам в формате ЕГЭ, к некоторым задачам из школьного учебника

Ключевые слова: методика преподавания математики, задачи, теория чисел

The article focuses on the application of the theory of numbers in a school course of mathematics, namely, in preparation for the Olympiad tasks type, for the task in the exam, and while preparing to solve problems of a school textbook

Key words: methods of teaching mathematics, tasks, number theory

Чернобровкина Ирина Ивановна

Кандидат педагогических наук, доцент
Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева
г. Орел, ул. Комсомольская, 95

Chernobrovkina Irina Ivanovna

Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor
Orel state university named I.S. Turgenev
Orel, Komsomolskaya st., 95

Чернобровкина Юлия Владимировна

Магистрант
Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева
г. Орел, ул. Комсомольская, 95

Chernobrovkina Yulia Vladimirovna

Master
Orel state university named I.S. Turgenev
Orel, Komsomolskaya st., 95

Дисциплина «Теория чисел» не зря входит в учебные планы при подготовке учителей математики. Задачи, решаемые с помощью аппарата теории чисел, классически входят в состав олимпиадных задач. В школьных учебниках по алгебре также встречаются задачи, которые требуют использования теории делимости. И в пособиях для подготовки к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике попадают задачи, которые требуют применения аппарата теории чисел. Хороший учитель математики должен уметь готовить школьников к участию в олимпиадах и развивать их математические способности. Для этого учителя сами должны быть подготовлены к решению таких задач. Часто в учебные планы подготовки учителей математики входят дисциплины типа «Олимпиадные задачи». Этой же цели может послужить и изучение дисциплины «Теория чисел». Программа дисциплины «Теория чисел» предполагает изучение двух больших тем: 1. Теория делимости в кольце целых чисел; 2. Теория сравнений. Изучение обеих этих тем дает возможность приобрести

знания, умения и навыки в решении олимпиадных задач, задач под №19 и некоторых типов №17 (ЕГЭ по математике), а также некоторых задач из школьного курса алгебры.

Итак, как уже было сказано, элементы теории чисел часто используются при составлении олимпиадных задач, например, в следующих темах: разложение на множители, простые и составные числа, остатки, сравнения по модулю, признаки делимости, перевод из одной системы счисления в другую, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, различные задачи в целых числах и т.д. Как правило, в тексте всегда присутствуют одна – две задачи из вышеперечисленных тем [2, 3].

Приведем некоторые примеры задач, решение которых опирается на аппарат теории чисел.

Тема: Целые числа.

1. a, b, c – натуральные числа, причем $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6. [2, с.144]

Указание к решению: числа x и x^3 при делении на 6 дают одинаковые остатки.

2. Докажите, что число $49^{100} - 14^{50}$ кратно 5 [2, с.145].

Указание к решению: последние цифры степеней равны.

Тема: Теория сравнений.

1. Квадрат целого числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими? [2, с.145].

Решение:

Квадрат некоторого числа может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 9, 6, 5.

Но $(2^k + 1) \equiv 1 \pmod{4}$, $(2k)^2 \equiv 0 \pmod{4}$, поэтому 11, 55, 66, 99 быть не могут.

$(2k)^2 \equiv 0, 4 \pmod{16}$, а $4444 \equiv 12 \pmod{16}$, поэтому 4444 также быть не может. Значит, ответ 0000.

2. Найти две последние цифры чисел

а) $1^3 + 2^3 + \dots + 99^3$;

б) $2^{999}, 3^{999}, 14^{14^{14}}$

Решение.

а) Сгруппируем кубы чисел попарно, взяв по одному слева и справа (кроме 50^3). Получим: $1^3 + 99^3, 2^3 + 98^3, \dots, 49^3 + 51^3$. Каждая такая сумма делится на 100. 50^3 также делится на 100. Поэтому две последние цифры 00.

б) Рассмотрим степени числа 2:

$2^{10} = 1024$, поэтому $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$, $2^{1000} \equiv 1 \pmod{25}$, значит 2^{1000} может оканчиваться на 01, $01 + 25 = 26$, $01 + 50 = 51$, $01 + 75 = 76$. Но из-за делимости на 4 это могут быть только цифры 76.

Тогда 2^{999} может оканчиваться либо на $38 = 76 : 2$, либо на $88 = 176 : 2$. Но опять из-за делимости на 4 число 2^{999} оканчивается на 88.

Рассмотрим степени числа 3:

$3^{999} = 3^3(3^4)^{249} \equiv 3^3(-19)^{249} \equiv 3^3(-19)(21)^{62} = 3^3(-19)(21)^2(21^4)^{15} \equiv 3^3(-19)^{16} 21^2 \equiv 3^3 21^6 = (3 \cdot 441)^3 \equiv 23^3 = 67 \pmod{100}$. Значит число 3^{999} оканчивается на 67.

Преобразуем третье число.

$(14^2)^{7 \cdot 14^{13}} \equiv (-4)^{7 \cdot 14^{13}} \pmod{25}$, но $7 \cdot 14^{13} \equiv -2 \pmod{5}$, т.е. $7 \cdot 14^{13} = 5p + 3$, а $(-4)^5 \equiv 1 \pmod{25}$, поэтому $14^{14^{14}} \equiv (-4)^3 \equiv 11 \pmod{25}$.

Возможные окончания числа: 11, 36, 61, 86. Из этих чисел на 4 делится лишь 36.

Ответ: а) 00; б) 88, 67, 36.

Как уже было сказано, в школьные учебники по алгебре также включены задачи на теорию делимости. Конечно, они не такие сложные, как олимпиадного типа, но тоже требуют особой подготовки учителя.

Приведем примеры задач на использование аппарата теории чисел из одного из действующих учебников по алгебре.

951. Докажите, что значения многочлена $x^3 - x$ при целых значениях x кратны числу 6.

Указание: доказывается путем разложения на множители и в этом разложении получаем три последовательных целых числа, одно из них – обязательно четное, и из трех последовательных целых чисел одно обязательно делится на 3. Таким образом, все произведение делится на 6.

952. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

Решение.

Удобно взять за два таких последовательных нечетных числа $(2x - 1)$ и $(2x + 1)$. И тогда $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$, что, очевидно, делится на 8.

953. Докажите, что если к произведению трех последовательных целых чисел прибавить среднее из них, то полученная сумма будет равна кубу среднего числа. [1, с. 189]

964. Какой остаток получится при делении числа 147^6 на 145?

965. Докажите, что значение выражения:

а) $83^4 + 65$ кратно 81;

б) $141^{10} + 88$ кратно 139. [1, с. 193]

Обратимся к экзаменационным вариантам ЕГЭ по математике (профильный уровень). Задачи №19 в различных учебных пособиях и на сайте «Решу ЕГЭ» – это фактически уровень олимпиадных задач на тему «Числа и их свойства», которые чаще всего также можно решать, используя аппарат теории чисел. Приведем примеры таких задач [4]

Задание 19 № 507579. Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Решение.

Пусть n – четное число, т.е. $n = 2k$.

Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$ и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, и $m = 3$.

Рассмотрим второй случай, когда n – нечетное число. Все нечетные степени тройки (3, 27, 243,...) делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае

$m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка).

Тогда $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$

Ответ: $m = 3$, $n = 2$ или $m = n = 1$.

Задание № 505627. Рассматриваются тройки целых чисел a , b и c , для которых выполнено условие: $a + b + c = 0$. Для каждой такой тройки вычисляется число $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$.

а) Может ли случиться, что $d = 2$?

б) Может ли случиться, что d – простое число?

Решение.

Начнем решение с пункта б). Для начала надо показать, что все нечетные степени произвольного целого числа имеют одинаковые остатки от деления на 6. Пусть a – целое число, a^{2k-1} и a^{2k+1} – две его произвольные соседние нечетные степени. Разность $a^{2k+1} - a^{2k-1} = a^{2k-1}(a^2 - 1)$ делится на 6, потому что одно число из тройки последовательных чисел $a-1$, a , $a+1$ делится на 3 и хотя бы одно число из этой тройки делится на 2. То есть, соседние нечетные степени числа a имеют одинаковые остатки от деления на 6, но тогда и любые нечетные степени числа a имеют одинаковые остатки от деления на 6.

Следовательно, $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999} = (a^{1999} - a) + (b^{1999} - b) + (c^{1999} - c) + a + b + c$ делится на 6, то есть не может быть никаким простым числом, в том числе и двойкой (это ответ на пункт а).

Таким образом, аппарат теории чисел активно используется в школьном курсе математики.

Список используемых источников:

1. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра. 7 класс. М.: Просвещение, 2013. 256 с.
2. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. М: МЦНМО, 2004. 560 с.
3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы. М.: Просвещение. 2010. 239 с.
4. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика. Профильный уровень. URL:// <http://ege.sdamgia.ru>