DOI: 10.17117/na.2016.03.03.122

Поступила (Received): 30.03.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.03.03.122.pdf>

**Михеев М.Ю., Андреев А.Б., Андреев М.А.
Помехоустойчивый алгоритм интегрально-
конечноразностного преобразования информации:
свойства во временной и частотной областях**

**Mikheev M.Yu., Andreev A.B., Andreev M.A.
Algorithm for noise suppression based on the integral-
finite-difference converting information: properties
in time and frequency domains**

Настоящая статья продолжает публикацию результатов исследования компенсационного алгоритма преобразования информации на основе комбинированного интегрально-конечноразностного преобразования. Она посвящена более детальному анализу свойств алгоритма во временной и частотной областях: рассмотрены два варианта алгоритма во временной области; выявлен изоморфизм частотных свойств вариантов алгоритма; определены вариации АЧХ в зависимости от размера произведения частоты режекции и периода дискретизации среднего значения исходного сигнала

Ключевые слова: алгоритмы компенсации гармонических помех, интегрально-конечноразностное преобразование, свойства во временной и частотной областях

Михеев Михаил Юрьевич

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой

Пензенский государственный технологический университет

г. Пенза, проезд Байдукова, ул. Гагарина, 1 А/11

Андреев Анатолий Борисович

Кандидат технических наук, доцент

Пензенский государственный технологический университет

г. Пенза, проезд Байдукова, ул. Гагарина, 1 А/11

This article is a continuation of publications of research results of the compensation algorithm convert information, based on the combined integral-finite-difference converting information. It is dedicated to a more detailed analysis of their properties in time and frequency domains: two variants of the algorithm in the time domain; the identified variants of isomorphism algorithms in the frequency domain; depending on the size of the product of two quantities: the frequency of rejection algorithm and sampling interval of the current mean value of the original signal

Key words: algorithms to compensate of harmonic noise, integral-finite-difference converting, properties in time and frequency domains

Mikheev Mikhail Yurievich

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department

Penza state technological university

Penza, Baydukova pass., Gagarina st., 1 A/11

Andreev Anatoliy Borisovich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Penza state technological university

Penza, Baydukova pass., Gagarina st., 1 A/11

Андреев Михаил Анатольевич

Аспирант

Пензенский государственный технологический университет

г. Пенза, проезд Байдукова, ул. Гагарина, 1 А/11

Andreev Mikhail Anatolievich

Graduate

Penza state technological university

Penza, Baydukova pass., Gagarina st., 1 A/11

Введение. Как известно [1], наиболее эффективным способом борьбы с гармоническими электромагнитными помехами нормального вида является усреднение аддитивной смеси полезного сигнала и помехи за отрезок времени, кратный периоду помехи. В работе [2] предложен и рассмотрен алгоритм компенсации влияния среднего значения гармонической помехи за время, гораздо меньшее периода самой помехи. В основе такого алгоритма лежит комбинированное интегрально-конечноразностное преобразование с использованием конечных разностей второго порядка. То есть такой алгоритм сочетает в себе как усреднение аддитивной смеси полезного сигнала и помехи, так и одновременное выделение среднего значения помехи с помощью конечной разности второго порядка с последующим вычитанием (компенсацией) его из среднего значения суммы полезного сигнала и помехи.

Дальнейшие исследования, результаты которых представлены ниже, касаются обобщения алгоритма на случай использования четных конечных разностей произвольного порядка $2n$ ($n \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел) и исследования его свойств во временной и частотной областях.

Краткое содержание обобщенного алгоритма. Компенсационный алгоритм преобразования информации на основе комбинированного интегрально-конечноразностного преобразования с использованием четных конечных разностей произвольного порядка $2n$ представляет собой три алгоритмических шага:

1. Формирование временного ряда из $2n+1$ средних значений $Y_{i+j-n}(2n, T_u)$ аддитивной смеси информативного сигнала $x(t)$ и неинформативного гармонического сигнала (помехи) $u(t) = U_m \sin \omega t = U_m \sin(2\pi / T)t$. Указанные средние значения определяются на примыкающих друг к другу и равных между собой отрезках времени T_u в виде:

$$Y_{i+j-n}(2n, T_u) = \frac{1}{T_u} \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt = \\ = X + \frac{\sin 0,5\omega T_u}{0,5\omega T_u} U_m \sin \omega [t + (j-n)T_u], \quad (1)$$

где j – параметр, который для любого n последовательно принимает значения из множества $\{0, 1, 2, \dots, 2n\}$;

$$X = \frac{1}{T_u} \int_{t-0,5T_u}^{t+0,5T_u} x(t) dt$$

– отсчет среднего значения $x(t)$ за отрезок времени T_u ,

соответствующий $j=n$ и центрированный относительно середины этого отрезка.

При этом из общего числа $2n + 1$ средних значений часть из них числом n с номерами, соответствующими $j = 0, \dots, n - 1$, располагаются по оси времени слева от центрального среднего значения I_i , отнесенного к текущему времени t ($j = n$). Еще n средних значений с номерами, соответствующими $j = n + 1, \dots, 2n$, – справа.

2. Формирование четной конечной разности $\Delta^{2n}(I_i)$ из $2n + 1$ средних значений $Y_{i+j-n}(2n, T_u)$ в соответствии с выражением [3, с. 668]:

$$\Delta^{2n}(I_i) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j C_{2n}^j Y_{i+j-n},$$

где $C_{2n}^j = \frac{(2n)!}{j!(2n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

3. Компенсация среднего значения помехи как слагаемого в центральном отсчете I_i с помощью четной конечной разности в соответствии с выражением:

$$I_{iK}(\Delta^{2n}) = (-1)^{n+1} Y_i + K_{2n} \Delta^{2n}(I_i) = (-1)^{n+1} Y_i + K_{2n} \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j C_{2n}^j Y_{i+j-n}, \quad (2)$$

где $I_{iK}(\Delta^{2n})$ – скомпенсированный (очищенный от влияния помехи) результат преобразования аддитивной смеси информативного сигнала $x(t)$ и неинформативного гармонического сигнала (помехи) $u(t)$;

$$K_{2n} = (2 \sin 0,5 \omega_r T_u)^{-2n} \quad (3)$$

априорно определяемый коэффициент для четной конечной разности произвольного порядка $2n$ при априорно заданных, но в общем случае произвольных значениях частоты режекции $\omega_r = 2\pi f_r$ алгоритма и отрезка интегрирования T_u .

С учетом соотношений (1) и (3) выражение (2), определяющее скомпенсированный результат преобразования, примет следующий окончательный вид:

$$Y_{iK}(\Delta^{2n}) = (-1)^{n+1} \left\{ X + \left[1 - \left(\frac{\sin 0,5 \omega T_u}{\sin 0,5 \omega_r T_u} \right)^{2n} \right] \frac{\sin 0,5 \omega T_u}{0,5 \omega T_u} U_m \sin \omega t \right\}, \quad (4)$$

где величина

$$A_{2n}(\omega T_u) = \left| \frac{\sin 0,5 \omega T_u}{0,5 \omega T_u} \left[1 - \left(\frac{\sin 0,5 \omega T_u}{\sin 0,5 \omega_r T_u} \right)^{2n} \right] \right|, \quad (5)$$

независящая от текущего времени t и размеров сигналов $x(t)$ и $u(t)$, очевидно, представляет собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) обобщенного компенсационного алгоритма интегрально-конечноразностного преобразования с использованием четной конечной разности произвольного порядка $2n$. Таким образом, в зависимости от порядка четной конечной разности получаем семейство рассматриваемых алгоритмов.

Свойства семейства алгоритмов во временной области. Вернемся к выражению (2) и запишем входящие в него величины через их интегральные значения в соответствии с выражением (1):

$$I_{iK}(\Delta^{2n}) = (-1)^{n+1} \frac{1}{T_u} \int_{t-0,5T_u}^{t+0,5T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt + \\ + K_{2n} \sum_{j=0}^{2n} \left\{ (-1)^j C_{2n}^j \frac{1}{T_u} \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt \right\}. \quad (6)$$

Далее второе слагаемое в выражении (6) разобьем на два слагаемых, выделив отдельно центральный отсчет Y_i :

$$I_{iK}(\Delta^{2n}) = (-1)^{n+1} \frac{1}{T_u} \int_{t-0,5T_u}^{t+0,5T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt + \\ + K_{2n} (-1)^n C_{2n}^n \frac{1}{T_u} \int_{t-0,5T_u}^{t+0,5T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt + \\ + K_{2n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{2n} \left\{ (-1)^j C_{2n}^j \frac{1}{T_u} \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt \right\}.$$

В последнем выражении сгруппируем первое и второе слагаемые, содержащие центральный отсчет Y_i :

$$I_{iK}(\Delta^{2n}) = (-1)^{n+1} [1 - K_{2n} C_{2n}^n] \frac{1}{T_u} \int_{t-0,5T_u}^{t+0,5T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt + \\ + K_{2n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{2n} \left\{ (-1)^j C_{2n}^j \frac{1}{T_u} \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} [x(t) + U_m \sin \omega t] dt \right\}. \quad (7)$$

Теперь в выражении (7) поменяем местами знаки суммы и интеграла во втором слагаемом, внесем под знак интеграла коэффициент $K_{2n} = \text{const}$ для априорно заданных конкретных значений: порядка конечной разности $2n$, частоты $\omega_r = 2\pi f_r$ режекции алгоритма и отрезка интегрирования T_u . При этом второе слагаемое представим в виде двух частей: первая часть – до центрального отсчета ($j = 0, \dots, n-1$), вторая часть – после центрального отсчета ($j = n+1, \dots, 2n$). Расположим получившиеся три слагаемых в их временной последовательности:

$$I_{iK}(\Delta^{2n}) = \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} \left\{ \left[\frac{K_{2n}}{T_u} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{2n}^j \right] [x(t) + U_m \sin \omega t] \right\} dt + \\ + \int_{t-0,5T_u}^{t+0,5T_u} \left\{ \left[\frac{(-1)^{n+1}}{T_u} (1 - K_{2n} C_{2n}^n) \right] [x(t) + U_m \sin \omega t] \right\} dt +$$

$$+ \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} \left\{ \left[\frac{K_{2n}}{T_u} \sum_{j=n+1}^{2n} (-1)^j C_{2n}^j \right] [x(t) + U_m \sin \omega t] \right\} dt. \quad (8)$$

Из анализа выражения (8) становится очевидным, что во временной области рассматриваемый алгоритм можно интерпретировать как реализацию процедуры весового интегрирования [4] аддитивной смеси информативного сигнала $x(t)$ и неинформативного сигнала (гармонической помехи) $u(t) = U_m \sin \omega t$ в течение суммы $2n + 1$ примыкающих друг к другу отрезков времени длительностью T_u каждый, то есть:

$$I_{iK}(\Delta^{2n}) = \int_{t+(j-n-0,5)T_u}^{t+(j-n+0,5)T_u} g_{2n}(t) [x(t) + U_m \sin \omega t] dt,$$

$$g_{2n}(t) = \begin{cases} \frac{K_{2n}}{T_u} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{2n}^j \quad \forall t \in [(j-n-0,5)T_u; (j-n+0,5)T_u]; \\ \frac{(-1)^{n+1}}{T_u} (1 - K_{2n} C_{2n}^n) \quad \forall t \in [-0,5T_u; +0,5T_u]; \\ \frac{K_{2n}}{T_u} \sum_{j=n+1}^{2n} (-1)^j C_{2n}^j \quad \forall t \in [(j-n-0,5)T_u; (j-n+0,5)T_u]; \\ 0 \quad \forall t \notin (-(n+0,5)T_u; (n+0,5)T_u) \end{cases}$$

где

$$(9)$$

весовая функция, центрированная относительно момента времени $t = 0$ и финитная на временном отрезке $[-(n+0,5)T_u; (n+0,5)T_u]$ реализации одного цикла алгоритма общей длительностью $(2n+1)T_u$.

В этом случае весовая функция $g_{2n}(t)$ для четных конечных разностей любого порядка $2n$ будет четно-симметричной функцией относительно оси ординат. Однако, как будет показано ниже в примерах, вид весовой функции будет еще зависеть и от того, четным или нечетным является число n , определяющее порядок четной конечной разности, а также от характера центрального весового коэффициента (равен нулю, больше или меньше нуля). Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $n = 1$ (нечетное число), то есть будет использоваться четная конечная разность порядка $2n = 2$. Следовательно, должно быть сформировано $2n + 1 = 3$ отсчета, а параметр j будет принимать значения 0, 1, 2. Тогда весовая функция $g_2(t)$ в соответствии с выражением (9) примет вид:

$$g_2(t) = \begin{cases} K_2 / T_u \quad \forall t \in [-1,5T_u; -0,5T_u]; \\ (1 - 2K_2) / T_u \quad \forall t \in [-0,5T_u; +0,5T_u]; \\ K_2 / T_u \quad \forall t \in [+0,5T_u; +1,5T_u]; \\ 0 \quad \forall t \notin (-1,5T_u; +1,5T_u). \end{cases} \quad (10)$$

Весовая функция $g_2(t)$, как видно из выражения (10), содержит три весовых коэффициента, крайние из которых g_{21} и g_{23} будут одинаковы и с учетом выражения (3) равны:

$$g_{21} = g_{23} = K_2 / T_u = \frac{1}{T_u (2 \sin 0,5 \omega_r T_u)^2} > 0, \quad (11)$$

то есть они будут всегда положительны.

Центральный весовой коэффициент, равный

$$g_{22} = \frac{1 - 2K_2}{T_u} = \frac{1}{T_u} \left[1 - \frac{2}{(2 \sin 0,5 \omega_r T_u)^2} \right] \quad (12)$$

может быть: равен нулю; больше нуля или меньше нуля.

Причем, указанные вариации весового коэффициента g_{22} , как будет показано далее, во многом определяют свойства алгоритма, как во временной, так и в частотной областях. Разберемся с этими свойствами подробнее во временной области.

Рис. 1. Вариации весовых функций при использовании четной конечной разности порядка: а) $2n = 2$; б) $2n = 4$

1) Рассмотрим первый случай, когда $g_{22} = 0$, то есть

$$g_{22} = \frac{1}{T_{u1}} \left[1 - \frac{2}{(2 \sin 0,5 \omega_r T_{u1})^2} \right] = 0 \text{ или } \sin \pi f_r T_{u1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда:}$$

$$\pi f_r T_{u1} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ или } \pi f_r T_{u1} = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно, для первого случая ($g_{22} = 0$) при использовании конечной разности второго порядка и частоте режекции алгоритма $f_r = 50$ Гц минимальное (условие минимума $k = 0$) значение T_{u1} будет равно:

$$T_{u1} = \frac{1}{4f_r} = \frac{1}{4 \cdot 50} = 5 \text{ (мс)}.$$

Рассуждая аналогичным образом для двух других случаев, получим:

2) когда $g_{22} < 0$, имеем $T_{u2} > 5$ (мс);

3) когда $g_{22} > 0$, имеем $T_{u3} < 5$ (мс).

В зависимости от вида центрального весового коэффициента g_{22} получаем вариации весовых функций, которые представлены на рис. 1а.

Пример 2. Теперь возьмем $n = 2$ (четное число), то есть будет использоваться четная конечная разность порядка $2n = 4$. Следовательно, должно быть сформировано $2n + 1 = 5$ отсчетов, а параметр j будет принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Тогда весовая функция $g_4(t)$ в соответствии с выражением (9) примет вид:

$$g_4(t) = \begin{cases} K_4 / T_u \quad \forall t \in [-2,5T_u; -1,5T_u]; \\ -4K_4 / T_u \quad \forall t \in [-1,5T_u; -0,5T_u]; \\ (6K_4 - 1) / T_u \quad \forall t \in [-0,5T_u; +0,5T_u]; \\ -4K_4 / T_u \quad \forall t \in [+0,5T_u; +1,5T_u]; \\ K_4 / T_u \quad \forall t \in [+1,5T_u; +2,5T_u]; \\ 0 \quad \forall t \notin (-2,5T_u; +2,5T_u). \end{cases} \quad (13)$$

Весовая функция $g_4(t)$, как видно из выражения (13), содержит пять весовых коэффициентов, крайние из которых g_{41} и g_{45} , а также g_{42} и g_{44} попарно одинаковы и в соответствии с выражением (3) равны:

$$g_{41} = g_{45} = K_4 / T_u = \frac{1}{T_u (2 \sin 0,5 \omega_r T_u)^4} > 0;$$

$$g_{42} = g_{44} = -4K_4 / T_u = \frac{-4}{T_u (2 \sin 0,5 \omega_r T_u)^4} < 0, \quad (14)$$

то есть никакой знаковой вариации или равенства нулю этих весовых коэффициентов не происходит.

Центральный весовой коэффициент, равный

$$g_{43} = \frac{6K_4 - 1}{T_u} = \frac{1}{T_u} \left[\frac{6}{(2 \sin 0,5 \omega_r T_u)^4} - 1 \right], \quad (15)$$

также как и в предыдущем примере, может быть равен нулю, больше или меньше нуля. Применив ту же последовательность действий, как в примере 1, получим:

- 1) когда $g_{43} = 0$, имеем $T_{u1} \approx \frac{0,285}{f_r} = \frac{0,285}{50} = 5,7$ (мс);
- 2) когда $g_{43} < 0$, имеем $T_{u2} < 5,7$ (мс);
- 3) когда $g_{43} > 0$, имеем $T_{u3} > 5,7$ (мс).

Таким образом, в зависимости от вида центрального весового коэффициента g_{43} , в соответствии с выражением (15) получаем вариации весовых функций, которые представлены на рис. 1б.

Подводя промежуточные итоги, отметим, что во временной области рассмотренный алгоритм может быть реализован как минимум в двух вариантах:

1. В своем исходном виде, то есть в виде последовательной реализации трех алгоритмических шагов;
2. В виде реализации операции весового интегрирования с числом весовых коэффициентов, определяемых порядком используемой конечной разности.

Свойства семейства алгоритмов в частотной области. Частотная и временная области существования алгоритмов могут быть связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Как уже отмечалось выше, в общем случае на временном отрезке $[-(n + 0,5)T_u; (n + 0,5)T_u]$ реализации одного цикла алгоритма общей длительностью $(2n + 1)T_u$, при принятых ранее условиях, весовые функции $g_{2n}(t)$ в соответствии с выражением (9) являются, во-первых, финитными, а во-вторых, четно-симметричными относительно оси ординат, так как $g_{2n}(t) = g_{2n}(-t)$ (рис. 1).

В этой связи для непосредственного получения выражения АЧХ, которая является наиболее валидной характеристикой частотных свойств алгоритма, можно воспользоваться прямым косинус-преобразованием Фурье в виде [5]:

$$A_{2n}(\omega T_u) = 2 \left| \int_0^{(n+0,5)T_u} g_{2n}(t) \cos \omega t dt \right|. \quad (16)$$

В связи с тем, что величины n, ω_r, T_u , а также функционально связанные с ними параметры K_{2n}, C_{2n}^j , для конкретного случая реализации алгоритма будут представлять собой константы, то выражение (16) с учетом выражения (9) может быть конкретизировано следующим образом:

$$A_{2n}(\omega T_u) = 2 \left| \frac{(-1)^{n+1}}{T_u} (1 - K_{2n} C_{2n}^n) \int_0^{+0,5T_u} \cos \omega t dt + \frac{K_{2n}}{T_u} \sum_{j=n+1}^{2n} (-1)^j C_{2n}^j \int_{+0,5T_u}^{(j-n+0,5)T_u} \cos \omega t dt \right|. \quad (17)$$

Поскольку дальнейшая конкретизация общего выражения АЧХ (17) возможна лишь для конкретных значений порядка $2n$ четной конечной разности, то вернемся к продолжению рассмотренных выше примеров.

Пример 1 (продолжение). Выражение АЧХ (17) для случая использования четной конечной разности порядка $2n = 2$ с учетом выражения (10) примет вид:

$$A_2(\omega T_u) = \frac{2}{T_u} \left| (1 - 2K_2) \int_0^{0,5T_u} \cos \omega t dt + K_2 \int_{0,5T_u}^{1,5T_u} \cos \omega t dt \right|$$

Сделав преобразования последнего выражения и подставив в него соотношения (11) и (12), получим выражение АЧХ для $2n = 2$:

$$A_2(\omega T_u) = \left| \frac{\sin 0,5\omega T_u}{0,5\omega T_u} \left[1 - \left(\frac{\sin 0,5\omega T_u}{\sin 0,5\omega_r T_u} \right)^2 \right] \right|. \quad (18)$$

Пример 2 (продолжение). Выражение АЧХ (17) для случая использования четной конечной разности порядка $2n = 4$ с учетом выражения (13) примет вид:

$$A_4(\omega T_u) = \frac{2}{T_u} \left| (6K_4 - 1) \int_0^{0,5T_u} \cos \omega t dt - 4K_4 \int_{0,5T_u}^{1,5T_u} \cos \omega t dt + K_4 \int_{1,5T_u}^{2,5T_u} \cos \omega t dt \right|$$

Сделав преобразования последнего выражения и подставив в него соотношения (14) и (15), получим выражение АЧХ для $2n = 4$:

$$A_4(\omega T_u) = \left| \frac{\sin 0,5\omega T_u}{0,5\omega T_u} \left[\left(\frac{\sin 0,5\omega T_u}{\sin 0,5\omega_r T_u} \right)^4 - 1 \right] \right| = \left| \frac{\sin 0,5\omega T_u}{0,5\omega T_u} \left[1 - \left(\frac{\sin 0,5\omega T_u}{\sin 0,5\omega_r T_u} \right)^4 \right] \right|. \quad (19)$$

На рис. 2 представлены вариации АЧХ при использовании четной конечной разности порядка $2n = 2$ (а) и $2n = 4$ (б), причем каждое для трех различных вариаций весовой функции в соответствии с рис. 1.

При построении АЧХ (рис. 2) были взяты следующие значения априорно определяемых параметров алгоритмов: значение частоты режекции во всех случаях $f_r = 50$ Гц; значения отрезков интегрирования: $T_{u1} = 5$ мс, $T_{u2} = 10$ мс, $T_{u3} = 10/3$ мс – для рис. 2а); $T_{u1} = 5,7$ мс, $T_{u2} = 10$ мс, $T_{u3} = 10/3$ мс – для рис. 2б).

Сравнивая выражения (18) и (19) АЧХ для случаев применения четных конечных разностей порядка $2n = 2$ и $2n = 4$ и применяя принцип математической индукции, можно записать общее выражение АЧХ для произвольной четного порядка $2n$ конечной разности в следующем виде:

$$A_{2n}(\omega T_u) = \left| \frac{\sin 0,5\omega T_u}{0,5\omega T_u} \left[1 - \left(\frac{\sin 0,5\omega T_u}{\sin 0,5\omega_r T_u} \right)^{2n} \right] \right|. \quad (20)$$

Рис. 2. Вариации АЧХ при использовании четной конечной разности порядка: а) $2n = 2$; б) $2n = 4$

Из выражения (20) видно, что, когда частота неинформативного гармонического сигнала (помехи) $u(t) = U_m \sin \omega t = U_m \sin(2\pi / T)t$ равна частоте режекции алгоритма, т.е. $\omega = \omega_r$, соотношение в квадратных скобках обращается в ноль независимо от порядка $2n$ четной конечной разности и длительности T_u отрезка времени интегрирования. Все это обеспечивает независимость выражения конечного результата $I_{iK}(\Delta^{2n})$ от влияния помехи за общий отрезок времени максимум $(2n + 1)T_u$, который может быть выбран произвольно в отношении периода помехи, например, гораздо меньше него.

Частные выражения (18) и (19), а также общее выражение (20) АЧХ получены за счет представления во временной области исходного компенсационного интегрально-конечноразностного преобразования в виде весового интегрирования с обобщенной весовой вида (9). При этом выражение (20) обобщенной АЧХ полностью совпало с выражением (5) обобщенной АЧХ, которая характеризует алгоритм в исходном его виде (см. начало данной статьи). То есть в отношении частотных свойств указанные выше два варианта алгоритма тождественны, следовательно, являются изоморфными в отношении частотных свойств.

Различие вариантов алгоритма определяется их временной реализацией, точнее, временной последовательностью алгоритмических шагов. Этот факт приводит к существенному различию, касающемуся общей длительности одного цикла преобразования в случае ее минимизации за счет «скользящего временного окна». Речь идет о том, что если в варианте алгоритма, основанном на реализации весового интегрирования, в силу симметрии весовой функции (9), последний результат текущего цикла преобразования взять в качестве первого результата следующего цикла, то, начиная со второго цикла, независимо от n его длительность будет всегда одинаковой и равной $2nT_u$, вместо длительности $(2n+1)T_u$ по числу отрезков весового интегрирования в цикле.

Для исходного варианта алгоритма, основанного на реализации скользящего интегрирования с единичным весовым коэффициентом с последующим определением конечных разностей и компенсацией с их помощью среднего значения помехи, начиная со второго цикла преобразования, длительность цикла может быть равной T_u . Указанное отличие особенно важно при использовании четных конечных разностей высоких порядков, например, для уменьшения полосы режекции алгоритма.

Из выражения (20) обобщенной АЧХ следует, что с увеличением порядка $2n$ четной конечной разности сужается ширина полосы частот режекции. Иллюстрацией этого служит рис. 3, на котором приведены АЧХ для $2n = 2; 4; 10; 1000$, $f_r = 50$ Гц и $T_u = 10$ мс. Этот факт говорит о возрастании избирательных свойств алгоритма с ростом порядка $2n$ в области частоты режекции и кратных ей частот.

Как видно из графиков АЧХ на рис. 2, при разных длительностях T_u и одинаковом порядке $2n$ четной конечной разности характер АЧХ существенно отличается друг от друга. В частности, при общем свойстве подавления первой гармоники 50-герцовой помехи, в АЧХ $A_{2n}(\omega T_{u1})$ и $A_{2n}(\omega T_{u3})$ отсутствует подавление второй гармоники с частотой 100 Гц. Общая тенденция: с уменьшением длительности одного отрезка интегрирования ($T_u < 5$ мс) возрастает площадь под кривой спектра, особенно для частот $f \gg 50$ Гц, что говорит об уменьшении избирательных свойств в отношении иных спектральных составляющих широкополосных помех, например, белого шума. При частотах от 0 до 50 Гц спектры $A_{2n}(\omega T_{u1})$ и $A_{2n}(\omega T_{u3})$ практически

совпадают, а спектр $A_{2n}(\omega T_u)$ в области частоты 50 Гц явно имеет ноль более высокой кратности.

Рис. 3. Вариации АЧХ при использовании четной конечной разности различного порядка для $T_u = 10$ мс

Эту последнюю особенность спектров $A_{2n}(\omega T_u)$ можно объяснить следующим образом. Обобщенное выражение АЧХ (20) состоит из двух сомножителей:

$$A_{2n(1)}(\omega T_u) = \left| \frac{\sin 0,5\omega T_u}{0,5\omega T_u} \right| \text{ и } A_{2n(2)}(\omega T_u) = \left| 1 - \left(\frac{\sin 0,5\omega T_u}{\sin 0,5\omega_r T_u} \right)^{2n} \right|.$$

Второй сомножитель $A_{2n(2)}(\omega T_u)$, как отмечалось выше, при $\omega = \omega_r$ обращается в ноль.

Первый сомножитель $A_{2n(1)}(\omega T_u)$ также может обращаться в ноль в случае, если в соответствии с теоремой Котельникова частота дискретизации $F_D = 1/T_u$ будет равна удвоенной частоте режекции алгоритма $2f_r$. То есть тождество $\sin 0,5\omega T_u = 0$ (числитель первого сомножителя) должно удовлетворять условию $1/T_u = 2f_r$, откуда при $f_r = 50$ Гц $T_u = 1/(2f_r) = 10$ мс. Таким образом, также как и для второго сомножителя, то есть независимо от порядка четной

конечной разности, первый сомножитель выражения (20) будет всегда равен нулю при $T_u = 1/(2f_r) = 10\text{мс}$.

В связи с изложенным выше на частоте режекции АЧХ (рис. 3) имеем двукратный ноль, что, видимо, и обеспечит повышенный коэффициент помехоподавления при $T_u = 10\text{мс}$ для любого порядка $2n$.

Выводы:

Как было показано выше, увеличение степени $2n$ четной конечной разности приводит к улучшению избирательных свойств в области частоты режекции. Однако сужение ширины полосы частот режекции влечет за собой уменьшение коэффициента подавления помехи при девиации ее частоты. В этой связи выбор конкретного значения степени четной конечной разности будет зависеть от решения конкретной задачи.

При этом следует отметить не критичность выбора длительности времени T_u интегрирования аддитивной смеси сигналов $x(t)$ и $u(t)$ для достижения эффекта подавления влияния неинформативного сигнала $x(t)$ (помехи). Общее время T_{np} преобразования информации с использованием рассмотренного алгоритма составляет значение $T_{np} = (2n + 1)T_u$. При использовании скользящего окна T_{np} окажется равным T_u (кроме самого первого отсчета). То есть увеличение степени $2n$ конечной разности никак не скажется на увеличении T_{np} . Следовательно, общее время T_{np} преобразования информации может быть выбрано гораздо меньше периода T_r (например, менее 20 мс – периода сетевой помехи частотой 50 Гц), определяемого частотой режекции алгоритма. При этом сохраняется свойство подавления ЭМП.

Список используемых источников:

1. Андреев М.А., Андреев А.Б. Уменьшение влияния гармонических помех в информационно-измерительных системах // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та. 2015. № 03(25). Т. 1. С. 98-104.
2. Андреев М.А. Конечноразностная модель алгоритмической компенсации влияния периодических помех нормального вида // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та. 2015. № 04(26). С. 169-175.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
4. Андреев М.А. Метод весового интегрирования как эффективный путь борьбы с электромагнитными помехами нормального вида в информационно-измерительных системах // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та, 2015. № 04(26). С. 176-181.
5. Андреев А.Б. Математические модели и избирательные свойства интегрирующих преобразователей средневыпрямленного значения физических величин // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та, 2014. № 03(19). С. 165-170.