DOI: 10.17117/na.2016.03.01.203

Поступила (Received): 16.03.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.03.01.203.pdf>**Маслénкова М.В.****Использование концепций PIT-TTC при моделировании вероятности дефолта корпоративных заемщиков****Maslenkova M.V.****Implementing PIT-TTC approach in a modelling of corporates' probability of default**

В данной статье рассматривается математический базис для применения подходов TTC и PIT при моделировании дефолта корпоративных заемщиков. Правильное толкование и применение этих понятий становится все более важным в условиях ужесточения требований к банковскому капиталу

Ключевые слова: вероятность дефолта, TTC, PIT

In this paper, the mathematical basis for using TTC and PIT approach, when modelling corporates' probability of default, is discussed. It becomes more and more necessary in the present trend of increased capital requirements on banks

Key words: probability of default, TTC, PIT

Маслénкова Марина Валерьевна

Магистр

Финансовый университет при правительстве РФ
г. Москва, Ленинградский пр-т, 49

Maslenkova Marina Valerievna

Master

Financial university under the government of RF
Moscow, Leningradsky ave., 49

Согласно классификации Базельского комитета, выделяют два основных подхода к оценке кредитных рисков: стандартизированный подход – подход на основе внешних (заданных международными рейтинговыми агентствами) кредитных рейтингов и подход на основе внутренних (рассчитанных банком самостоятельно) рейтингов. Оба подхода предполагают методологию расчета достаточности капитала банка, необходимого для покрытия основных банковских рисков. Подход на основе внутренних рейтингов позволяет банку более гибко оценить кредитные риски, поэтому в настоящее время ему уделяется большое внимание.

Одним из компонентов данного подхода является вероятность дефолта (PD от англ. Probability of Default). PD является внутренней характеристикой каждого заемщика, т.е. она не зависит от величины обеспечения, типа продукта и проч. Подразумевается присвоение одного и того же внутреннего рейтинга заемщикам с одинаковой вероятностью дефолта. От того, насколько корректно произведено расчет PD зависит эффективность принятия управленческих решений по расчету уровня достаточного капитала банка.

Для оценки вероятности дефолта корпоративных заемщиков часто используется построение регрессионных моделей. Сначала выбираются количественные и качественные показатели и определяются группы «хороших» (не было дефолта) и «плохих» заемщиков. Осуществляется поиск значимых параметров, и затем строится уравнение регрессии, описывающая найденные закономерности. Допустим такая модель имеется в наличии. Однако, можно ли ее будет применять спустя некоторое время, когда изменится экономическая ситуация? Сможет ли построенная модель с тем же успехом применяться к новым заемщикам, когда их отдельные показатели (качественные и количественные) поменяют свою значимость? В исчерпывающем большинстве случаев ответ будет отрицательным. Решить эту проблему помогают понятия вероятности дефолта с точки зрения двух рейтинговых концепций: PIT (от англ. Point-in-Time) и TTC (от англ. Through-the-Circle).

PIT PD позволяет определить вероятность дефолта в конкретный момент времени, принимая во внимание текущие показатели деятельности заемщика и изменение экономического цикла. TTC PD есть вероятность объявления заемщиком дефолта в течение определенного количества времени, принимая во внимание текущие показатели деятельности заемщика и некие усредненные показатели экономики, независимо от того какие они на данный момент. Исходя из этих определений, легко понять, что предпочтение отдается TTC PD, поскольку она позволяет обеспечить стабильность требований к капиталу банка. Это, в свою очередь, соответствует ожиданиям регулятора, поскольку в таком случае отсутствуют резкие колебания величины достаточности капитала.

Расчет TTC PD может осуществляться двумя способами. Первый способ основан на модели так называемого «переменного коэффициента». Суть его заключается в искусственной трансформации модели PIT в TTC: вероятность дефолта занижается в периоды экономического спада и завышается в периоды экономического роста до некоторого значения, соответствующего средней вероятности дефолта, вычисленной за долгосрочный период. Второй способ – построение структурной модели. Структурная модель связывает кредитоспособность фирмы и ее экономическое и финансовое состояние, из чего следует что вероятность дефолта в модели является эндогенной величиной.

Структурные модели опираются на структурные показатели фирм такие как, величина активов, величина долга. Модель Мертона (1974) является первой созданной моделью этого типа. В ней дефолт фирмы наступает, когда в момент выплаты требований по долгу активы фирмы меньше этих требований.

Предположим что динамика активов фирмы n , равных величине $V_{n,t}$ в момент t , подчиняется геометрическому броуновскому движению:

$$\frac{dV_{n,t}}{V_{n,t}} = \mu_n dt + \sigma_n dW_{n,t}, \quad (1)$$

где μ_n – ожидаемая стоимость активов, σ_n – волатильность стоимости активов, $W_{n,t}$ – стандартное броуновское движение. Фирма финансируется за счет собственного капитала акционеров и за счет заемного капитала. Будем обозначать величину заемного капитала (кредиторской задолженности) $D_{n,t}$. При наступлении срока платежа по кредиторской задолженности в момент $t = T$,

кредиторы предъявляют требования в размере суммы долга $D_{n,t}$. Здесь вводится следующее упрощение: фирма имеет только один долг в размере $D_{n,t}$, который имеет форму облигации с нулевым купоном. Это означает, что вся сумма долга должна быть уплачена разовым платежом в момент времени $t = T$ без процентов. Также, предполагается, что фирма не несет никаких издержек при совершении сделок (например, выплата налога).

Рассмотрим две возможные ситуации, которые могут произойти на момент выплаты долга. Первый, оптимистичный сценарий, предполагает, что долг полностью обеспечен стоимостью активов компании, т.е. $V_{n,T} \geq D_{n,T}$. В этом случае кредиторы получают величину своих требований D_T , а акционерам достается оставшаяся часть $V_{n,T} - D_{n,T}$. Второй, пессимистичный сценарий, предполагает, что величина долга превышает стоимость компании, т.е. $V_{n,T} < D_{n,T}$. В этом случае кредиторы получают ту стоимость компании, которая доступна $V_{n,T}$, а акционеры теряют свою компанию, а значит, происходит дефолт компании. Таким образом, стоимость получаемой кредиторами суммы можно записать так:

$$D_{n,T} = \begin{cases} D_{n,T}, & V_{n,T} \geq D_{n,T} \\ V_{n,T}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2)$$

Такая формулировка показывает, что сумма, которую получают кредиторы совпадает с определением прибыли продавца европейского опциона пут без учета комиссии. Допустим, что стоимость активов компании $V_{n,T}$ имеет нормальное распределение со стандартным отклонением σ , а величина безрисковой ставки равна r . На основе модели ценообразования Блэка-Шоулза, цена исполнения такого опциона равна:

$$K_{n,t,T} = \frac{\ln D_{n,t} - \ln V_{n,t} - \left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_n \sqrt{T-t}} \quad (3)$$

Вероятность дефолта фирмы во время $t < T$ при наступлении $t = T$ можно записать следующим образом:

$$p_{n,t,T} = P[V_{n,T} < D_{n,T} | V_{n,t}]$$

Согласно формуле Ито, процесс (1) можно переписать как зависимость стоимости активов фирмы в момент T от текущей величины активов $V_{n,t}$:

$$V_{n,T} = V_{n,t} \exp \left\{ \left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2} \right) (T-t) + \sigma_n \sqrt{T-t} X_{n,t,T} \right\}, \quad (4)$$

где $X_{n,t,T}$ задается так:

$$X_{n,t,T} = \frac{W_{n,T} - W_{n,t}}{\sqrt{T-t}}, \quad (5)$$

где $X_{n,t,T}$ имеет стандартное нормально распределение.

Выразив отсюда $X_{n,t,T}$ получим:

$$X_{n,t,T} = \frac{\ln A_{n,T} - \ln V_{n,t} - \left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_n \sqrt{T-t}} \quad (6)$$

Теперь можно записать условие дефолта фирмы n при наступлении $t = T$ в терминах случайной величины $X_{n,t,T}$:

$$V_{n,T} < D_{n,T} \Leftrightarrow X_{n,t,T} < K_{n,t,T} \quad (7)$$

С учетом, можно сказать, что вероятность дефолта равна:

$$p_{n,t,T} = P(X_{n,t,T} < K_{n,t,T}) = \Phi(K_{n,t,T}) \quad (8)$$

Вычислим вероятность дефолта каждой из фирм $n = 1, \dots, N$ во время $t > 0$ с тем допущением, что одна фирма имеет только один долг. Тогда вероятность дефолта будет переписана следующим образом:

$$p_{n,t} = \Phi \left(\frac{\ln D_n - \ln V_{n,0} - \left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2} \right) t}{\sigma_n \sqrt{t}} \right) = \Phi(K_{n,t}) \quad (9)$$

Согласно модели Vasicek, для вычисления вероятности дефолта всего портфеля недостаточно знать вероятности дефолта каждой из компаний. Необходимо также знать корреляцию между вероятностями дефолта этих компаний. Поскольку единственная случайная величина, которая влияет на состояние компании n в момент времени t (произошел/не произошел дефолт) – это $X_{n,t}$, то корреляционная структура между вероятностями дефолта разных компаний может быть выражена через случайные величины $X_{1,t}, \dots, X_{N,t}$ с нормальным распределением. Предположим, что коэффициент корреляции каждой пары $X_{n,t}$ и $X_{m,t}$ – это $\rho_{n,m,t}$. При допущении, что коэффициент корреляции $\rho_{n,m,t}$ одинаков для каждой пары $X_{n,t}$ и $X_{m,t}$ получим:

$$\text{corr}(X_{n,t}, X_{m,t}) = \rho_{n,m,t} = \rho_t, n \neq m \quad (10)$$

Такое допущение позволяет предположить, что существует случайная экзогенная переменная, которая влияет на величину активов всех фирм в портфеле одним и тем же образом. Более того, можно записать случайные величины

$$X_{n,t} = \sqrt{\rho_t} Y_t + \sqrt{1 - \rho_t} \varepsilon_{n,t}, \quad (11)$$

для всех $n = 1, \dots, N$ где $Y_t, \varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{N,t}$ имеют стандартное нормальное распределение. Эту запись можно проинтерпретировать следующим образом. Каждая случайная величина $X_{n,t}$, от значения которой зависит произойдет ли дефолт фирма n в период t , представляет собой сумму двух факторов риска. Один из них – систематический фактор риска Y_t , который влияет на все фирмы одинаково. Другой – случайный (идиосинкратический) фактор риска, который для каждой фирмы индивидуален.

Условная вероятность дефолта для каждой из фирм, с учетом систематического фактора риска, при условии, что случайные величины $X_{1,t}, \dots, X_{N,t}$ представляется следующей формулой:

$$p_n(Y_t) = P[X_{n,t} < K_{n,t} | Y_t] = P[\sqrt{\rho_t} Y_t + \sqrt{1 - \rho_t} \varepsilon_{n,t} < K_{n,t} | Y_t] = P \left[\varepsilon_{n,t} < \frac{K_{n,t} - \sqrt{\rho_t} Y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}} \middle| Y_t \right] = \Phi \left(\frac{K_{n,t} - \sqrt{\rho_t} Y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}} \right) \quad (12)$$

Если известны вероятности дефолта каждой компании в портфеле в момент времени t , $p_{1,t}, \dots, p_{N,t}$, то последнюю формулу можно переписать с учетом того, что величина $K_{n,t}$ для каждой компании вычисляется: $K_{n,t} = \Phi^{-1}(p_{n,t})$:

$$p_n(Y_t) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_{n,t}) - \sqrt{\rho_t} Y_t}{\sqrt{1 - \rho_t}} \right) \quad (13)$$

Вероятность $p_n(Y_t)$ в формуле (12) является вероятностью дефолта по концепции PIT, поскольку учитывает текущее состояние экономики, а вероятность $p_{n,t}$ в формуле (9) – вероятность дефолта по концепции TTC.

Перепишем формулу (9) в терминах TTC PD и PIT PD:

$$p_{TTC_{n,t}} = \Phi(K_{n,t})$$

Выразим $K_{n,t}$ из (12):

$$K_{n,t} = \sqrt{\rho_t} Y_t + \sqrt{1 - \rho_t} \Phi^{-1}(p_{PIT_n}(Y_t)) \quad (15)$$

Отсюда вероятность дефолта по концепции ТТС будет равна:

$$p_{TTC_{n,t}} = \Phi(\sqrt{\rho_t} Y_t + \sqrt{1 - \rho_t} \Phi^{-1}(p_{PIT_n}(Y_t))) \quad (16)$$

Таким образом, с помощью формулы (16) выражена зависимость вероятностей дефолта по двум концепциям РИТ и ТТС. Это является итогом данной статьи, который доказывает, что, имея вероятность дефолта, например по концепции РИТ нетрудно получить из нее вероятность дефолта по концепции ТТС и наоборот.

Список используемых источников:

1. Carlehed M., Petrov A. Methodology for point in time through the-cycle probability of default decomposition in risk classification systems // Journal of risk model validation. Vol. 6. Number 3. P. 3–25.
2. Bank for International Settlements An explanatory note on the Basel II IRB risk weight functions. July 2005.

© 2016, Маслénкова М.В.

Использование концепций РИТ-ТТС при моделировании вероятности дефолта корпоративных заемщиков

© 2016, Maslenkova M.V.

Implementing PIT-TTC approach in a modelling of corporates' probability of default