DOI: 10.17117/na.2016.02.02.443

<http://ucom.ru/doc/na.2016.02.02.443.pdf>

Поступила (Received): 27.02.2016

Коротков А.В. О алгебрах размерности $2n$

Korotkov A.V.
On algebras of dimension $2n$

В связи с разработкой многомерных векторных алгебр размерностей $2n-1$ появилась необходимость изучения закономерностей алгебр размерностей $2n$. В докладе показано, что построение алгебр размерностей $2n$ связано не с векторными алгебрами размерностей $2n-1$, а с тензорами второго ранга, частным случаем которых являются векторные алгебры размерностей $2n-1$

In connection with the development of multidimensional, vector algebras of dimensions $2n-1$ appeared the necessity to study regularities of algebras of dimensions $2n$. The report shows that the construction of algebras of dimension $2n$ is connected not with vector algebras of dimension $2n-1$, with tensors of the second rank, which are a special case of a vector algebra of dimension $2n-1$

Ключевые слова: целочисленные многомерные векторные алгебры

Key words: integer multidimensional vector algebra

Коротков Анатолий Васильевич

Доктор физико-математических наук, кандидат технических наук, академик МАСИ, доцент
Шахтинский Завод Гидропривод
г. Шахты, пер. Якутский, 2

Korotkov Anatoly Vasilyevich

Doctor of Physico-mathematical Sciences, Candidate of Technical Sciences, Academician of the MASI, Associate Professor
Shakhty Factory Hidroprivod
Shakhty, Yakutsky lane, 2

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последнюю четверть столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изо векторного исчислений [1,2].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не

является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Порядок получения многомерных векторных алгебр, использует известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел), комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Вместе с тем пока не удалось поучить симметричные по координатам конструкции 2^n мерных векторных алгебр. Отметим сразу, что в этом случае векторное произведение двух векторов можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} = & (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1, \\ & (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2; \\ & (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Вместе с тем четвертый вектор уже нельзя представить в такой форме и ему соответствует не приемное соотношение совершенно иного вида:

$$(a_0b_0 - a_0b_0 + a_1b_0 - a_0b_1 + a_2b_0 - a_0b_2 + a_3b_0 - a_0b_3)\mathbf{e}_0.$$

Очевидно, данный способ определения четвертой координаты вектора не совпадает с определением первых трех координат, что указывает на его неприемлемость, т. е. четырех мерная, а также 2^n мерные векторные алгебры не могут быть построены. В связи с этим мы рассмотрим структурные константы 3-, 7-, 15-, ..., 2^n-1 , ... векторных алгебр и найдем структурные константы 2^n алгебр, не являющихся векторными [1]. Приведем структурные константы 1-ну, 3-х, 7-ми, 15-ти мерных векторных алгебр таблицы 1-3.

Таблица 1. Структурные константы 15-ти мерной векторной алгебры

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

Таблица 2. Четные степени оператора 15-ти мерной векторной алгебры

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Таблица 3. Четные степени оператора 7-ми и 3-х мерных векторных алгебр

	1	2	3	4	5	6	7								
1	-6	1	1	1	1	1	1								
2	1	-6	1	1	1	1	1								
3	1	1	-6	1	1	1	1								
4	1	1	1	-6	1	1	1								
5	1	1	1	1	-6	1	1	-2	1	1					
6	1	1	1	1	1	-6	1	1	-2	1					
7	1	1	1	1	1	1	-6	1	1	-2	0				

Покажем, что 2^n – мерный случай, является частным случаем, расширяемой до бесконечности алгебры с помощью таблиц. Эти таблицы 1-3 и 4-6 фиксируют разницу между аксиальными и полярными величинами, что проявляется в дополнительной строчке и столбике операторов векторных алгебр.

Таблица 4. Нечетные степени оператора 16-ти мерной векторной алгебры

0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0

Таблица 5. Четные степени оператора 16-ти мерной алгебры

-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15

Таблица 6. Четные степени операторов 2-х, 4-х и 8-ми мерных алгебр

-7	0	0	0	0	0	0	0								
0	-7	0	0	0	0	0	0								
0	0	-7	0	0	0	0	0								
0	0	0	-7	0	0	0	0								
0	0	0	0	-7	0	0	0	-3	0	0	0				
0	0	0	0	0	-7	0	0	0	-3	1	1				
0	0	0	0	0	0	-7	0	0	1	-3	1	-1	0		
0	0	0	0	0	0	0	-7	0	1	1	-3	0	-1		

Это приводит не только к разнице полярных и аксиальных векторов, т.е. отличие 2^n-1 -мерных векторных алгебр от 2^n - мерных алгебр. Это отличие проявляется также в степенях (четных и нечетных) матриц, определяющих структурные константы, особенно четных. Причем четные степени матриц диагональны и пропорциональны единичной матрице, а нечетной степени матриц отличаются первым столбцом и первой строкой. Можно найти значительное число функций этих матричных величин. Такое построение структурных констант алгебр расширяется до чрезвычайно больших размеров матриц (проверена 2047). Безусловно, дальнейшее расширение матриц структурных констант. Все определяется параметрами компьютера. Отметим также, что все алгебры меньшей размерности, как 2^n-1 , так и 2^n является частным случаем алгебр большей размерности. Таким образом, я представляю целесообразный способ построения векторных алгебр четной и нечетной размерностей.

Отметим, что таблицы структурных констант алгебр четной размерности дают матрицы преобразований анти симметрического тензора совпадающего по форме записи с тензором 7-ми мерного электромагнитного поля (P, A) и аналогичны, тензору (-P, A), где P и A соответственно полярный и аксиальный векторы электрического и магнитного полей [2]. Таким образом, можно утвер-

ждать, что алгебры четной размерности представляются анти симметрическими тензорами второго ранга, а векторные алгебры – векторными произведениями двух векторов. При этом появляется целый ряд функций характеризующих анти симметрические и симметрические произведения

m - векторов.

Все требуемые вычисления разнообразных функций рассматриваемых алгебр можно осуществить в программной среде Mathcad.

Список используемых источников:

1. Коротков А.В. Пятнадцати мерная векторная алгебра. Альманах современной науки и образования. №12(67). 2012. Ч. 2. С. 80-86.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10-ти томах. Т. 2. Теория поля. М.: Наука. 1988, С. 30-42, 88-90.

© 2016, Коротков А.В.
О алгебрах размерности $2n$

© 2016, Korotkov A.V.
On algebras of dimension $2n$