DOI: 10.17117/na.2016.01.01.439

Поступила (Received): 29.01.2016

<http://ucom.ru/doc/na.2016.01.01.439.pdf>**Кабаева Е.В.****О применении интервального анализа для повышения точности компьютерных вычислений****Kabaeva E.V.****Application of interval analysis to improve the accuracy of computer calculations**

Большинство компьютерных вычислений основано на бинарной логике (0 и 1), однако при исчислении вещественных (натуральных) чисел присутствует погрешность. Одно из возможных решений этой проблемы лежит в переходе к постбинарным вычислениям, основанным на инструментах интервального анализа

Ключевые слова: интервал, неопределенность, интервальный анализ, направленные округления

Most of the computing is based on binary logic (0 and 1), but when calculating the real (natural) numbers present error. One possible solution to this problem lies in the transition to postminimal calculations based on interval analysis tools

Key words: interval, uncertainty, interval analysis, directed rounding

Кабаева Елена Валерьевна

Старший преподаватель

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова

г. Абакан, пр. Ленина, 90

Kabaeva Elena Valerievna

Senior Lecturer

Khakas state university named N. F. Katanov
Abakan, Lenin ave., 90

Интервальный анализ как научное направление сформировался относительно недавно, в основном как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ, обусловленный тем, что во многих вычислительных задачах возникла потребность не только вычисления приближенных решений, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям.

Из классической математики известно, что замкнутый числовой промежуток можно представить в виде интервала. Например, интервал между $x_1 \in R$ и $x_2 \in R$ содержит все вещественные числа из множества R между x_1 и x_2 , включая их самих, и обозначается как $[x_1, x_2]$. Соответственно, интервальную неопределенность можно понимать как состояние неполного (частичного) знания о какой-либо величине, когда возможно лишь указание ее принадлежности к данному интервалу. Иными словами, можно обозначить лишь границы возможных значений рассматриваемой величины (либо пределы ее изменения), и ширина получающегося интервала является естественной мерой интервальной неопределенности (неоднозначности). Такая математическая дисциплина, т. е. дисциплина, которая изучает задачи с интервальными неопределенностями и неод-

нозначностями в данных и методы их решения, называется интервальным анализом, а подход, основанный на представлении вещественных чисел в ЭВМ в виде интервалов (интервальный тип данных), называется интервальным подходом [1].

Выполнение арифметических операций над величинами, имеющими интервальную неопределенность, приводит к интервальной неопределенности в ответе, и интервал результата должен содержать все возможные результаты выполнения операции над элементами исходных интервалов. Это значит, что в результате интервальных вычислений получающийся интервал гарантированно содержит множество всевозможных ответов «точечных» задач, данные к которым содержались в исходных интервалах.

В то же время все чаще возникают ситуации, когда возможности классических бинарных ЭВМ (ориентированных на использование бинарной логики и арифметики только с двумя возможными логическими состояниями «0» и «1») не отвечают возрастающей сложности и масштабам современных вычислительных задач и компьютерного моделирования.

Например, дробное число $1/10$ может порождать вычислительную неточность, т. к. компьютер не может выполнять точные вычисления с этим числом [2]. На классических вычислительных машинах дробь $1/10$ не имеет точного внутреннего представления, и должна быть приближена подходящей двоичной дробью. В качестве такого приближения разработчики взяли 24-битное двоичное число 0.00011001100110011001100, которое меньше, чем $1/10$, примерно на одну миллионную, что и рождает погрешность [3].

Рассмотрим одну из сфер применения методов интервального анализа, а именно, учёт ошибок округления при вычислениях с числами с плавающей точкой. Числа с плавающей точкой (floating point numbers), которые являются основой современных цифровых ЭВМ, оказываются не вполне адекватными как реальному физическому миру, так и его математическим моделям, в частности, математическому понятию вещественного (действительного) числа. Основные недостатки чисел с плавающей точкой, как хорошо известно, заключаются в следующем:

- Большинство чисел вещественной оси не могут быть представлены точно числами с плавающей точкой, имеющими конечную длину мантииссы.
- Свойства арифметических операций над числами с плавающей точкой отличаются (из-за неизбежных округлений) от свойств идеальных математических операций над вещественными числами.
- Число в формате с плавающей точкой не несёт никакой информации о точности той величины, которую оно представляет.

Получается, что существующая модель вычислений с плавающей точкой не предназначена ни для представления, ни для отслеживания вычислительных ошибок, и потому большинство расчётов с ней и не дают никакого анализа точности результатов. В той мере, в какой подобные вычислительные результаты используются для принятия критических решений, неучтённые ошибки

вычислений означат повышенный риск. И чем сильнее эта зависимость от вычисляемых результатов, чем более важной является их корректность, тем больше допускаемый риск.

Интервальный тип данных и интервальная арифметика реализуются на современных ЭВМ, например, представлением интервала как пары чисел – одного для левого конца интервала, а другого для правого. При этом существующее аппаратное обеспечение, в частности, арифметика чисел с плавающей точкой, используются без каких-либо изменений, так как корректность получающейся интервальной арифметики может быть обеспечена так называемыми *направленными округлениями* [4]. Например, там, где в задачах внешнего интервального оценивания в процессе вычислений требуется округление результата, нижняя граница интервала должна округляться вниз, а верхняя граница интервала – вверх. Таким образом, даже неизбежные ошибки округления при вычислениях с плавающей точкой будут строго и систематически учитываются в процессе выполнения интервальной программы.

Интервальная арифметика имеет некоторые ограничения, однако наличие направленных округлений в интервальном анализе (вместо плавающего числа в компьютерных исчислениях) делает накопление ошибки контролируемым, повышая надёжность вычисления. Для вычисления закономерности распределения используются, например, мода (для определения частоты) или медиана (показатель центра распределения) [5]. Эта простая алгебра открывает возможности для математического моделирования систем и повышения точности в моделях отражающих семантику отношений в сложных системах.

Применение инструментов интервального анализа и интервальной арифметики может способствовать повышению точности вычислений при моделировании поведения сложных систем, тем более что существует программное обеспечение для реализации низкоуровневой поддержки интервальных типов данных (как минимум реализовано для платформ Windows и Linux).

Список используемых источников:

1. Добронец Б.С. Интервальная математика. Красноярск: Издательство КГУ, 2007.
2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. XYZ, 2015.
3. Строгий учет ошибок округлений на цифровых ЭВМ.
URL: <http://www.sbras.ru/interval/index.php?j=Introduction/RusIntro>
4. Кулиш У., Рац Д., Хаммер Р., Хокс М. Достоверные вычисления. Базовые численные методы. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
5. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 2011.