DOI: 10.17117/na.2015.12.02.199

Поступила (Received): 24.12.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.12.02.199.pdf>

**Селина Н.Г., Кораблина С.Ю.,
Осина Т.М., Афанасьева Р.Ф., Прохоров В.Т**
**Оценка обоснованности выбора пакетов материалов
по формированию комфортных условий
военнослужащим Арктики (сообщение 2)**

**Selina N.G., Korablina S.Yu., Osina T.M.,
Afanasyeva R.F., Prokhorov V.T.**
**Assessment of the validity of the choice of materials
for the formation of a package of comfortable
conditions servicemen Arctic (2 message)**

В сообщениях проведены исследования по созданию костюма и обуви для защиты от холода военнослужащего, находящегося в условиях Арктики. В основу создания теплозащитной одежды для эксплуатации в условиях Арктики должен быть положен научный принцип, учитывающий физиологию теплообмена человека с окружающей средой. При разработке теплозащитной одежды следует выполнять требования к теплоизоляции всех областей тела. С увеличением толщины пакета материалов утепляющей одежды повышается практически только температура кожи тех областей тела, которые защищены (туловище, плечо, бедро)

Ключевые слова: костюм, обувь, военнослужащий, в условиях Арктики, холод, холодовой стресс, охлаждение, теплозащитная одежда

Селина Надежда Геннадьевна
Аспирант
Института сферы обслуживания и
предпринимательства (филиал)
г. Шахты-500, ул. Шевченко, 147

Кораблина Светлана Юрьевна
Доцент
Федеральное бюро медико-социальной экспертизы
г. Москва, ул. Ивана Сусанина, 3

In the messages researches on creation of a suit for protection against cold of the serviceman who is in conditions of the Arctic are conducted. The scientific principle considering physiology of heat exchange of the person with environment has to be the basis for creation of heat-shielding clothes for operation in the conditions of the Arctic. When developing heat-shielding clothes it is necessary to fulfill requirements to thermal insulation of all areas of a body. With increase in thickness of a package of materials of the warming clothes practically only temperature of skin of those areas of a body, which zakshchishchena increases (a trunk, a shoulder, a hip)

Key words: a suit, the serviceman, shoes, in the conditions of the Arctic, cold, holodovaya stress, cooling, heat-shielding clothes

Selina Nadezhda Gennadevna
Graduate
Institute of the service sector and enterprise
(branch)
Shakhty-500, Shevchenko st., 147

Korablina Svetlana Yurevna
Associate Professor
Federal bureau of medical and social expertise
Moscow, Ivan Susanin st., 3

Осина Татьяна Матвеевна

Кандидат технических наук, доцент
Института сферы обслуживания и
предпринимательства (филиал)
г. Шахты-500, ул. Шевченко, 147

Osina Tatiana Matveevna

Candidate of Engineering Sciences, Associate
Professor
Institute of the service sector and enterprise
(branch)
Shakhty-500, Shevchenko st., 147

Афанасьева Ралема Федоровна

Доктор медицинских наук, профессор, главный
научный сотрудник
Института сферы обслуживания и
предпринимательства (филиал)
г. Шахты-500, ул. Шевченко, 147

Afanasyeva Ralema Federovna

Doctor of Medical Sciences, Professor, chief scientific
officer
Institute of the service sector and enterprise
(branch)
Shakhty-500, Shevchenko st., 147

Прохоров Владимир Тимофеевич

Доктор технических наук, профессор
Института сферы обслуживания и
предпринимательства (филиал)
г. Шахты-500, ул. Шевченко, 147

Prohorov Vladimir Timofeevich

Doctor of Engineering Sciences, Professor
Institute of the service sector and enterprise
(branch)
Shakhty-500, Shevchenko st., 147

Окружающей средой для человека в одежде и обуви являются воздух, твердый грунт или снег и вода. Отдельные участки стопы человека могут находиться в контакте с любой из указанных сред. В условиях холода, при разнице между температурами тела человека и окружающей средой, происходит непрерывный теплообмен, переход тепловой энергии от тела человека в окружающую среду. При быстро меняющихся условиях внешней среды и режиме физической нагрузки поддерживать состояние тепловой уравновешенности практически невозможно. Процесс охлаждения стоп сопровождается появлением у носчиков обуви различных дискомфортных ощущений.

При эксплуатации обуви в различных климатических зонах возникает ситуация создания таких условий, при которых стопа человека должна ощущать комфортность в течение всего времени нахождения человека в этих условиях. Для реализации такой задачи использовались специальные эксперименты, позволяющие проследить ситуацию изменения теплового состояния стопы в исследуемых образцах обуви при различной температуре воздуха. Если носчик ощущал дискомфорт, то принималось решение, что такое соотношение выбранных материалов для верха и низа обуви не обеспечивает защиту стопы от воздействия на нее низких температур. Естественно, что такие эксперименты являлись затратными и материалоемкими, так как требовали проведения большого количества опытов в естественных условиях, или в специальных климатических камерах с привлечением большого числа носчиков, но это все равно не гарантирует от ошибок и практически неосуществимо при рассмотрении всего ассортимента обуви, который выпускается обувными предприятиями. Основными факторами, влияющими на температуру внутриобувного пространства при построении математической модели, являются температура окружающей среды, теплообразование стопы, теплофизические свойства материалов, составляющих обувные пакеты, форма этих пакетов и теплоотдача с внешней поверхности обуви в окружающую среду. В основу концепции математической модели

положено представление обуви как совокупность многослойных пакетов материалов различной формы и состава. Для ее разработки с помощью программы 3D Studio MAX 5 построили геометрический образ модели (на примере мужского ботинка) (рис.1) Модель мужского ботинка построена с использованием базовых геометрических объектов

1 – подошва – плоская пластина; 2 – голенище -вертикальный многослойный цилиндр;
3 – пяточно-перейменный участок -многослойный цилиндрический сегмент, развёрнутый под углом к продольной оси модели; 4 – пучковый участок – горизонтальный многослойный цилиндрический сегмент; 5 – носочная часть -многослойный сферический сегмент;
6 – пяточная часть – вертикальный многослойный цилиндрический сегмент

Рис. 1. Геометрический образ модели мужского ботинка

Для построения соответствующей математической модели распределения температуры подошвы введем следующие обозначения:

δ_i – толщина i -го слоя; $l_i = \sum_{k=1}^i \delta_k$ – пределы изменения координаты x_i i -го слоя ($l_{i-1} \leq x_i \leq l_i$); t – время; λ_i – коэффициент теплопроводности i -го слоя; a_i – коэффициент температуропроводности i -го слоя; $\theta_i(x_i, t)$ – температура i -го слоя $l_{i-1} \leq x_i \leq l_i$; T_c – температура окружающей среды; $T_i(x_i, t) = \theta_i(x_i, t) - T_c$ – относительная температура i -го слоя $l_{i-1} \leq x_i \leq l_i$, $i = 1, \dots, n$.

При построении математической модели мы рассмотрим низ обуви как n -слойную пластину, между слоями которой будем предполагать идеальный контакт.

Задача о распределении температуры сводится к решению системы:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}(x_i, t) = a_i \frac{\partial^2 T_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, \quad l_{i-1} < x_i < l_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

При построении математической модели мы рассмотрим низ обуви как n -слойную пластину, между слоями которой будем предполагать идеальный контакт.

Задача о распределении температуры сводится к решению системы:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}(x_i, t) = a_i \frac{\partial^2 T_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, \quad l_{i-1} < x_i < l_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Начальное распределение температуры

$$T_i(x_i, 0) = f_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Функция $f_i(x_i)$ предполагается гладкой на отрезке $[0, l_n]$, т.е. имеет непрерывную производную на этом отрезке (если обувь надевают непосредственно перед тем как выйти на улицу, то можно считать $f_i(x_i) = \text{const}$ – равной относительной температуре в помещении).

Граничные условия: относительная температура на внешней поверхности подошвы поддерживается равной 0, т.е. равной температуре окружающей среды:

$$T_n(l_n, t) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что вместо этого условия можно рассматривать граничное условие третьего рода: $\lambda_n \frac{\partial T_n(l_n, t)}{\partial x_n} + \alpha T_n(l_n, t) = 0$.

Внутренняя поверхность подошвы нагревается тепловым потоком стопы плотности q :

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x_1} + q = 0, \quad (4)$$

Между слоями пакета предполагается идеальный контакт, который выражается условиями сопряжения на стыках:

$$T_{i-1}(l_{i-1}, t) = T_i(l_{i-1}, t), \quad \lambda_{i-1} \frac{\partial T_{i-1}(l_{i-1}, t)}{\partial x_{i-1}} = \lambda_i \frac{\partial T_i(l_{i-1}, t)}{\partial x_i}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (5)$$

Решение задачи, будем искать в виде $T_i(x_i, t) = R_i(x_i) + N_i(x_i, t)$, $i = 1, \dots, n$, где функция $R_i(x_i)$ является решением краевой задачи стационарной теплопроводности при соответствующих неоднородных условиях вида (4), (5) и условиях сопряжения (6). Функция $N_i(x_i, t)$ является решением нестационарной краевой задачи с однородными краевыми условиями и неоднородным начальным условием.

Окончательно получаем выражение температуры i -го слоя обуви:

$$\begin{aligned} \theta_i(x_i, t) &= T_i(x_i, t) + T_c = \\ &= T_c + A_i x_i + B_i + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{ik} M_{ik} \exp(-\mu_k^2 t) \sin\left(\frac{\mu_k x_i}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{ik}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

В отличие от многослойной пластины внешняя поверхность цилиндрических и сферических сегментов больше чем внутренняя, и это различие будет тем больше, чем больше будет толщина пакета материалов, формирующих детали обуви, представляющих собой многослойные полые цилиндры. Для пакетов цилиндрической ($\nu = 1$) и сферической ($\nu = 2$) формы задача теплопроводности ставится таким же образом, как и для пакетов плоской пластины.

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r_i^2} + \frac{v}{r_i} \frac{\partial T_i}{\partial r_i} \right), \quad (7)$$

Граничные условия: $i = 1, \dots, n$, $R_{i-1} < r_i < R_i$ от стопы на внутреннюю поверхность обуви поступает тепловой поток плотности q . На внешней поверхности обуви происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(R_0, t) + q = 0; \quad \lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial r}(R_n, t) + \alpha(T_n(R_n, t) - T_c) = 0; \quad (8)$$

между слоями предполагается идеальный контакт $T_{i-1}(R_{i-1}, t) = T_i(R_{i-1}, t)$;

$$\lambda_{i-1} \frac{\partial T_{i-1}}{\partial r}(R_{i-1}, t) = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}(R_{i-1}, t), \quad i = 2, \dots, n. \quad (9)$$

Начальные условия

$$T_i(r, 0) = \varphi_i(r), \quad R_{i-1} \leq r \leq R_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Решения задач (3-5) для многослойных цилиндра и сферического сегмента находится в виде соответствующих рядов

$$T_i(r, t) = A_i \ln r + B_i + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{i,k} J_0 \left(\frac{\mu_k r}{\sqrt{a_i}} \right) + B_{i,k} Y_0 \left(\frac{\mu_k r}{\sqrt{a_i}} \right) \right) \exp(-\mu_k^2 t); \quad (11)$$

$$T_i(r, t) = A_i + \frac{B_i}{r} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} M_{ik} \exp(-\mu_k^2 t) \sin \left(\frac{\mu_k r}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{ik} \right), \quad (12)$$

которые сходятся равномерно и абсолютно на отрезке $[R_{i-1}, R_i]$ при любом $t \geq 0$. В ряде (12) $J_0(x)$, $Y_0(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода индекса. Зная теплофизические характеристики материалов, составляющих обувной пакет, температурные условия окружающей среды и энергозатраты стопы, по полученным формулам можно рассчитать температуру в любой части обуви и в любой момент времени. В частности, можно получить температуру внутриобувного пространства как функцию времени, которая является критерием температурной комфортности стопы при эксплуатации обуви в условиях низких температур.

В качестве примера расчета изменения температуры внутриобувного пространства как функции времени при воздействии на обувь низких температур рассматриваются мужские ботинки. Характеристики материалов, составляющих пакеты всех узлов рассматриваемой модели обуви, приведены в таблице 1.

Для расчетов распределения температуры были написаны программы с использованием математических пакетов Maple. Входные данные программы:

- толщины слоев материалов, составляющих пакет;
- коэффициенты теплопроводности и температуропроводности этих материалов;
- плотность теплового потока, поступающего от стопы к внутренней поверхности пакета;
- температура окружающей среды;
- начальная температура обувного пакета;
- коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности пакета в окружающую среду.

Таблица 1. Характеристика материалов, обеспечивающих защиту стопы от воздействия низких температур

Наименование материалов, входящих в пакет *	Толщина материала, входящего в пакет	Коэффициент теплопроводности, Вт/(м °С), и наименование узлов для анализа комфортности				Коэффициент температуропроводности, м ² /ч, и наименование узлов для анализа комфортности			
		низ обуви	пяточная часть обуви	верх обуви	носовая часть обуви	низ обуви	пяточная часть обуви	верх обуви	носовая часть обуви
1	2,0	0,05	0,05	0,05	0,050	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
2	10,0	-	0,04	0,04	0,040	-	0,0003	0,0003	0,0003
3	0,3	-	0,038	0,038	0,038	-	0,0005	0,0005	0,0005
4	1,2	-	-	-	0,07	-	-	-	0,00035
5	2,7	-	0,083	-	-	-	0,00014	-	-
6	1,2	-	0,07	0,07	0,07	-	0,0002	0,0002	0,0002
7	10,0	0,04	-	-	-	0,0003	-	-	-
8	2,5	0,083	-	-	-	0,00014	-	-	-
9	5	0,125	-	-	-	0,00042	-	-	-
10	20	0,07	-	-	-	0,00065	-	-	-

* 1 – носок хлопчатобумажный (внутренняя обувь); 2 – подкладка из натурального меха; 3 – межподкладка из бязи; 4 – кожаный подносок; 5 – задник из картона; 6 – кожа для верха обуви; 7 – вкладная стелька из искусственного или натурального меха; 8 – картон (второй слой вкладной стельки); 9 – основная стелька и подложка (кожа); 10 – пористая резина

Построенные математические модели позволяют найти распределение температуры внутриобувного пакета материалов при воздействии на него низких температур. Тепловое состояние человека зависит от дефицита тепла в его организме. Если теплообразование организма уравнивается теплоотдачей с поверхности его тела через одежду и обувь, то создается тепловой баланс. Если теплообразование больше, то тепло накапливается в организме, если теплообразование меньше, то теплосодержание и средняя температура тканей тела человека снижаются.

В работе проведен был расчет теплотерь с различных зон мужских ботинок клеевого метода крепления (рис. 2).

Рис. 2. Мужской ботинок с разбивкой на зоны

Для численной реализации построенных математических моделей теплообмена были написаны программы в математической оболочке Maple 9.5. В качестве примера теоретического расчета изменения температуры внутриобувного пространства как функции времени при воздействии на обувь низких температур рассматривались мужские ботинки. Материалы, из которых составлены пакеты, и их теплофизические характеристики приведены в таблице. Температура окружающей среды предполагается равной -25°C , начальная температура внутриобувного пространства равна $+22^{\circ}\text{C}$. Плотность теплового потока стопы берется равной 64 Вт/м^2 , что соответствует энергозатратам человека при легкой физической нагрузке. Коэффициент теплоотдачи предполагается равным $7 \text{ Вт/(м}^2\text{ }^{\circ}\text{C)}$.

При эксплуатации обуви в различных климатических зонах возникает ситуация создания таких условий, при которых стопа человека должна ощущать комфортность в течение всего времени нахождения человека в этих условиях. Для реализации такой задачи использовались специальные эксперименты, позволяющие проследить ситуацию изменения теплового состояния стопы в исследуемых образцах обуви при различной температуре воздуха.

Если носчик ощущал дискомфорт, то принималось решение, что такое соотношение выбранных материалов для верха и низа обуви не обеспечивает защиту стопы от воздействия на нее низких температур. Естественно, что такие эксперименты являлись затратными и материалоемкими, так как требовали проведения большого количества опытов в естественных условиях, или в специальных климатических камерах с привлечением большого числа носчиков, но это все равно не гарантирует от ошибок и практически неосуществимо при рассмотрении всего ассортиментного ряда обуви, который выпускается обувными предприятиями.

Кроме экспериментальных методов определения теплозащитных свойств обуви, используются аналитические, основанные на определении суммарного сопротивления теплоперехода от поверхности стопы к внешней среде через пакеты материалов для верха и низа обуви. В выражение этого суммарного сопротивления входит средний коэффициент теплообмена обуви с внешней средой, который обычно рассчитывается по критериальным уравнениям и не позволяет выявить те участки обуви, которые наиболее подвержены влиянию холода, и защитить именно их от теплопотерь. Поэтому так важно разработать математическую модель для обоснования выбора пакетов материалов для верха и низа обуви с целью создания комфортности стопы с учетом продолжительности воздействия на нее низких температур.

Работа направлена на решение актуальной проблемы разработки пакета материалов для защиты стопы от воздействия низких температур с обеспечением комфортных условий в течение заданного времени эксплуатации.

Обувь (ботинки мужские зимние) можно представить в виде совокупности составных многослойных плоских, цилиндрических и сферических пакетов обувных материалов, так как тепловое сопротивление пакетов, составленные из одних и тех же материалов различны и зависят от формы пакетов. Поэтому, возникает необходимость рассматривать разбиение обуви на локальные участки,

представляющие собой многослойные пакеты различной формы. Необходимость такого решения обусловлено тем, что различные участки стопы характеризуются неравномерным теплообразованием.

Одним из критериев комфортности стопы при эксплуатации обуви в условиях низких температур является время. В частности, температура внутриобувного пространства зависит от времени пребывания человека на холоде. В этой связи авторы впервые сформулировали необходимость обоснования зависимости температуры внутриобувного пространства от времени воздействия на стопу низких температур.

Кроме того при разработке математической модели авторами впервые был учтен тот факт, что коэффициенты теплопроводности материалов, из которых формируется низ и верх обуви, зависят от температуры окружающей среды. Такое решение оправдано уже по тому, что обеспечит более адекватное формирование температуры обувного пространства стопе носчика при воздействии на нее низких температур окружающей среды.

При низких температурах распределение температуры внутри пакета материалов неравномерно и зависит от теплофизических характеристик материалов, составляющих пакет для различных геометрических объектов. В работе ставится задача по разработке программного продукта для расчета распределения температуры внутри пакета материалов с учетом локальных участков обуви.

При разработке теплозащитной обуви для климатических зон с пониженной температурой возникает ряд трудностей по обоснованному выбору материалов, которые могли бы удовлетворить всем требованиям по комфортному пребыванию человека в условиях пониженных температур. Поэтому необходимо разработать программный продукт по обоснованному выбору пакета материалов для обеспечения комфортного пребывания человека в течение всего периода его нахождения в зонах с пониженной температурой.

В работе ставится задача по сравнительному анализу экспериментальных исследований по определению времени комфортного пребывания стопы в обуви в климатической камере и данных, полученных аналитическим путем. Реализация такой задачи позволит и производителям и потребителям иметь спецобувь, удовлетворяющую основным требованиям по обеспечению комфортных условий носчику, находящемуся в климатических зонах с пониженной температурой.

Процесс теплообмена в обуви описывается системой уравнений теплопроводности

$$c_i(T_i)\rho_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial r_i}\right) + \frac{v}{r_i}\left(\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial r_i}\right), i = 1, 2 \dots n;$$

с граничными условиями: внутренняя поверхность пакета материалов нагревается тепловым потоком стопы плотности q : $\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial r_1}(R_0, t) + q(t) = 0$; на внешней поверхности обуви происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи α :

$$\lambda_n(T_n) \frac{\partial T_n}{\partial r_n}(R_n, t) + \alpha \{ T_n(R_n, t) - T_c \} = 0;$$

между слоями низа обуви предполагается идеальный контакт, который выражается условиями сопряжения на стыках:

$$T_{i-1}(R_{i-1}, t) = T_i(R_{i-1}, t); \lambda_{i-1}(T_{i-1}) \frac{\partial T_{i-1}}{\partial r_{i-1}}(R_{i-1}, t) = \lambda_i(T_i) \frac{\partial T_i}{\partial r_i}(R_{i-1}, t), i = 2, \dots, n.$$

Начальные условия: $T_i(r_i, 0) = f_i(r_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Предполагается, что коэффициент теплопроводности $\lambda_i(T_i)$ линейно зависит от температуры $\lambda_i = \lambda_{0i}(1 + \beta_i T_i)$, где λ_{0i} – коэффициент теплопроводности i -го слоя при температуре окружающей среды.

Для практического применения построенной математической модели была написана программа в оболочке MATLAB 7.0, которая дает возможность рассчитать динамику изменения температуры внутриобувного пространства при воздействии на стопу носчика низких температур окружающей среды.

Программа позволяет сформировать необходимые многослойные пакеты, материалы для которых выбираются из базы данных программы (Рис.4). Каждый материал содержится в базе данных вместе со своими теплофизическими характеристиками (коэффициенты теплопроводности и температуропроводности), число слоев пакета и их толщину определяют конструктор, технолог в зависимости от условий ее эксплуатации для различных климатических зон. Разумеется, всегда есть возможность пополнять базу данных новыми материалами. Также для расчетов задаются температура окружающей среды, коэффициент теплоотдачи на поверхности обуви и плотность теплового потока стопы человека.

Результаты расчетов выводятся на экран в виде графика зависимости температуры внутриобувного пространства от времени нахождения носчика в климатической зоне. Значение температуры внутриобувного пространства, которое адекватно температуре стопы носчика, в любой момент времени можно вывести в соответствующее окно.

С помощью разработанного программного обеспечения были проведены расчеты изменения температуры внутриобувного пространства низа обуви с учетом и без учета зависимости теплопроводности от температуры. Значительное различие результатов исследования делает необходимым использовать именно ту математическую модель, в которой такое изменение учитывается.

В частности, можно получить температуру внутриобувного пространства как функцию времени, которая является критерием температурной комфортности стопы при эксплуатации обуви в условиях низких температур.

В результате вычислений, получено, что наибольшая потеря тепла происходит в носочной части стопы. В связи с этим при проектировании зимней обуви, чтобы продлить время комфортного пребывания, необходимо подбирать соответствующие материалы, формирующие пакет в носочной части. Обувь, изготовленная с использованием выбранных пакетов, характеристика которых и теплофизические характеристики материалов, сформировавшие эти пакеты, приведенные в таблице, обеспечивают длительное комфортное пребывание

стопы только при температуре окружающей среды -5°C и оказались непригодными для длительной носки при температуре -25°C и ниже.

Конструкции верха и низа обуви состоят из нескольких слоев материалов, причем части конструкции различаются числом деталей и слоев. Такие конструкции рассматриваются в виде сложных и составных стенок. Стационарный режим теплообмена предполагает, что температура остается постоянной (не зависит от времени) для каждой точки сложной стенки, составляющих обувь.

Для многослойной стенки процесс прохождения тепла описывается системой уравнений, с учетом граничных условий.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \lambda_1(T_1 - T_2) / \int_{n_1}^{n_2} dN / S(N); \\ Q = \lambda_2(T_2 - T_3) / \int_{n_2}^{n_3} dN / S(N); \\ Q = \lambda_3(T_3 - T_4) / \int_{n_3}^{n_4} dN / S(N); \\ \dots\dots\dots \\ Q = \alpha(T_{n+1} - T_c) S_{n+1}. \end{array} \right. \quad (13)$$

От стопы на внутренний слой обуви поступает тепловой поток плотности q . Теплообмен между внешней поверхностью обуви и окружающей средой (с температурой T_c) происходит по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи α . Предполагается, что на границе слоев существует идеальный контакт, т.е. температура T_i и тепловые потоки на поверхности соседних слоев одинаковы.

а) плоская многослойная пластина с граничными условиями 2-го и 3-го рода. Пусть система материалов состоит из n слоев толщиной $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ и коэффициентами теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Так как площадь поверхности каждого слоя плоской стенки одинакова, в стационарном режиме распределение температур на поверхностях слоев определяется системой равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (T_1 - T_2); \\ q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} (T_2 - T_3); \\ \dots \\ q = \frac{\lambda_n}{\delta_n} (T_n - T_{n+1}); \\ q = \alpha (T_{n+1} - T_c). \end{array} \right.$$

Решая систему относительно T_i , получим

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{q}{\alpha} + T_c; \quad T_n = q \left(\frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha} \right) + T_c; \quad \dots \quad T_i = q \left(\sum_{k=i}^n \frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha} \right) + T_c; \\ \dots \quad T_1 &= q \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha} \right) + T_c. \end{aligned}$$

Выражение $R = \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha}$ называется тепловым сопротивлением многослойного плоского пакета материалов. Если взять за критерий комфортности температуру T_1 контакта внутренней поверхности обуви и стопы, то можно просчитать тепловое сопротивление пакета R , обеспечивающее комфортные условия стопе в течение длительного времени.

б) цилиндрическая многослойная стенка с граничными условиями 2-го и 3-го рода

Пусть система материалов состоит из n слоев с внутренними и внешними радиусами $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ и коэффициентами теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно.

В системе (13) для i -го слоя цилиндрической стенки

$$\int_{n_i}^{n_{i+1}} dN/S(N) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} dr / (2\pi r l) = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}$$

(l – высота цилиндра). Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} Q = 2\pi r_1 q; \\ Q = \lambda_1 (T_1 - T_2) / \left(\frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} \right); \\ Q = \lambda_2 (T_2 - T_3) / \left(\frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_3}{r_2} \right); \\ Q = \lambda_3 (T_3 - T_4) / \left(\frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_4}{r_3} \right); \\ \dots\dots\dots \\ Q = \alpha (T_{n+1} - T_c) 2\pi r_{n+1} l. \end{cases}$$

Решая систему относительно температуры T_i , получим

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{qr_1}{r_{n+1}\alpha} + T_c; \\ T_n &= qr_1 \left(\frac{\ln(r_{n+1}/r_n)}{\lambda_n} + \frac{1}{r_{n+1}\alpha} \right) + T_c \dots; \\ T_i &= qr_1 \left(\sum_{k=i}^n \frac{\ln(r_{k+1}/r_k)}{\lambda_k} + \frac{1}{r_{n+1}\alpha} \right) + T_c \dots; \\ T_1 &= qr_1 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(r_{k+1}/r_k)}{\lambda_k} + \frac{1}{r_{n+1}\alpha} \right) + T_c; \end{aligned}$$

Выражение $R = r_1 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(r_{k+1}/r_k)}{\lambda_k} + \frac{1}{r_{n+1}\alpha} \right)$ называется полным термическим сопротивлением многослойной цилиндрической стенки.

в) шаровая многослойная стенка с граничными условиями 2-го и 3-го рода

Пусть многослойная шаровая стенка состоит из n слоев с внутренними и внешними радиусами $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ и коэффициентами теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно.

Для i -го слоя шаровой стенки

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} dN/S(N) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} dr / (4\pi r^2) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right).$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} Q = 4\pi r_1^2 q; \\ Q = \lambda_1 (T_1 - T_2) / \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \\ Q = \lambda_2 (T_2 - T_3) / \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right); \\ \dots\dots\dots \\ Q = \alpha (T_{n+1} - T_c) 4\pi r_{n+1}^2. \end{cases}$$

Решая систему относительно температуры T_i , получим

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{qr_1^2}{r_{n+1}^2 \alpha} + T_c; \\ T_n &= qr_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}} \right) + \frac{1}{r_{n+1}^2 \alpha} \right) + T_c \dots; \\ T_i &= qr_1^2 \left(\sum_{k=i}^n \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right) + \frac{1}{r_{n+1}^2 \alpha} \right) + T_c \dots; \\ T_1 &= qr_1^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right) + \frac{1}{r_{n+1}^2 \alpha} \right) + T_c; \end{aligned}$$

Выражение $R = r_1^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right) + \frac{1}{r_{n+1}^2 \alpha} \right)$ называется полным термическим сопротивлением многослойной шаровой стенки.

Если считать комфортными условиями состояния стопы температуру контакта, равной 21°C – 25°C, то диапазон изменения теплового сопротивления пакета обувных материалов низа обуви, обеспечивающего эти комфортные условия длительное время (8 часов) при различной температуре окружающей среды, приведенные в таблице 2.

Таблица 2. Тепловое сопротивление пакета материалов низа обуви ($\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C} / \text{Вт}$), обеспечивающее комфортную температуру межобувного пространства 21°C – 25°C при различном уровне теплообразования стопы и при теплоотдаче с коэффициентом $\alpha = 20 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Температура окружающей среды	Плотность теплового потока стопы ($\text{Вт} / \text{м}^2$)			
	40	60	80	100
0°C	0,48–0,58	0,31–0,37	0,22–0,27	0,17–0,21
–5°C	0,61–0,71	0,39–0,46	0,28–0,33	0,22–0,26
–10°C	0,73–0,83	0,47–0,54	0,34–0,39	0,27–0,31
–15°C	0,86–0,96	0,55–0,62	0,4–0,45	0,32–0,36
–20°C	0,98–1,08	0,63–0,7	0,46–0,51	0,37–0,41

В самом простом случае, когда рассматривается пакет из одного материала толщиной $\delta = r_2 - r_1$ и коэффициентом теплопроводности λ , тепловое сопротивление

$$\text{для плоской пластины: } R_n = \frac{r_2 - r_1}{\lambda};$$

$$\text{для полого цилиндра: } R_y = r_1 \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\lambda};$$

$$\text{для шарового сегмента: } R_w = r_1^2 \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\lambda},$$

где r_1, r_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы пакета. Если зафиксировать r_1 , то тепловые сопротивления будут функциями от переменной r_2 . При $r_2 > r_1$ можно показать, что $R_n > R_y > R_w$. Для этого составим две функции $f_1(r_2) = R_n - R_y$ и $f_2(r_2) = R_y - R_w$. При $r_2 = r_1$ эти функции будут равны нулю. Производные $f_1'(r_2) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2} > 0$, $f_2'(r_2) = \frac{r_1}{\lambda r_2^2} (r_2 - r_1) > 0$. Следовательно, функции $f_1(r_2)$ и $f_2(r_2)$ возрастающие, а значит $R_n > R_y > R_w$. Таким образом, тепловое сопротивление пакета зависит от его формы. Значит, возникает необходимость рассматривать разбиение обуви на локальные участки, представляющие многослойные пакеты различной формы. В силу того, что полное сопротивление многослойных пакетов представляет сумму тепловых сопротивлений слоев, то соотношение $R_n > R_y > R_w$ будет справедливо и для многослойных пакетов материалов.

В качестве примера, подтверждающего этот вывод, рассмотрим пакет материалов, состоящий из 5 слоев. Состав пакета и характеристики материалов представлены в таблице 3.

Таблица 3. Характеристика слоёв материалов, входящих в пакет

№ слоя	Материалы, входящие в пакет	δ , мм	λ_0 , Вт/(м $\cdot$ °C)
1	Х/б носок	2	0,05
2	Меховая овчина	10	0,039
3	Бязь	0,3	0,038
4	Поролон	6	0,07
5	Выросток хромового дубления	1,2	0,06

Проанализируем, как изменится тепловое сопротивление в зависимости от формы пакета при $\alpha = 8$ Вт/(м $\cdot$ °C) и внутренним радиусом $r_1 = 63$ мм.

$$R_n = \sum_{k=1}^5 \frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha} = 0,535 (\text{м}^2 \cdot \text{°C} / \text{Вт})$$

$$R_y = r_1 \left(\sum_{k=1}^5 \frac{\ln(r_{k+1}/r_k)}{\lambda_k} + \frac{1}{r_6 \alpha} \right) = 0,457 (\text{м}^2 \cdot \text{°C} / \text{Вт})$$

$$R_w = r_1^2 \left(\sum_{k=1}^5 \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right) + \frac{1}{r_6^2 \alpha} \right) = 0,393 (\text{м}^2 \cdot \text{°C} / \text{Вт}).$$

Получили, что $R_n > R_u > R_w$. Чтобы выровнять значения тепловых сопротивлений R_n , R_u и R_w нужно, например, увеличить толщину меха в цилиндрическом пакете примерно на 3мм и соответственно в сферическом – на 5,5мм. Таким образом, полное тепловое сопротивление пакета существенно зависит от его формы, что говорит о необходимости локального рассмотрения процесса теплообмена через различные конструктивные узлы обуви.

Если для стопы авторы сформулировали условия, при которых будут обеспечены комфортные условия военнослужащему при нахождении его в климатических зонах с пониженной температурой, то анализ существующих математических моделей теплового состояния человека в условиях влияния факторов окружающей среды позволяет предположительно определить форму элементов человеческого тела, которое можно разделить на следующие участки: голова – шар; руки, ноги – цилиндры; туловище – набор эллиптических цилиндров.

Таким образом, человека можно представить в виде совокупности геометрических фигур, изображенных на рис. 3.

Рис. 3. Геометрическое формирование элементов тела человека

Систематизация приведенного материала представлена в таблице. 4

Таблица 4. Модельные представления человека

Модель	Столвийк Д.А.	Жаворонков А.И, Бринк И.Ю, Расторгуева Н.П, Ермакова О.А.	Матюшев Т.В.	Кудрявцев В.И.
Голова	шар	шар	цилиндр	шар
Туловище	цилиндр	цилиндр	цилиндр	набор эллиптических цилиндров
Ноги	цилиндр	цилиндр	цилиндр	цилиндр
Кисти, стопы	цилиндр	цилиндр	цилиндр	цилиндр
Пальцы рук, ног	-	цилиндр	-	цилиндр

В результате получено новое модельное описание человека, которое отличается от разработанных ранее представлений геометрическим изображением туловища. Исследование процессов теплообмена тела человека при таком подходе позволит более рационально распределить утеплитель на поверхности модели.

Аналогичным образом строится геометрическая модель женского тела. Естественно, каноническое представление не подходит для построения моделей людей с нестандартной комплекцией, как для мужчин, так и для женщин. Измененные параметры секторов туловища и гибкая система аппроксимации позволит реализовать эту возможность с применением подобных уточнённых моделей. Применение канонических модельных представлений может быть реализовано лишь для конечностей, которые имеют незначительные отличия.

Новое представление туловища человека в виде набора эллиптических цилиндров актуально и обосновано задачей несимметричности тепловых потоков с туловища человека.

Аналогично цилиндра с эллиптическими образующими его аналог может быть представлен в виде цилиндра, в сечение которого расположен овал, с параметрами идентичными эллипсу. Такой подход поможет избежать сложных вычислений и упростит последующую задачу обчета тепловых потоков модели. При создании овала используем метод осей и перпендикуляров, который позволяет преобразовать эллиптический цилиндр в цилиндр, основой которого является овал с аналогичными эллипсу параметрами.

В результате проделанных вычислений необходимо получить овал, состоящий из восьми секторов по четыре сектора окружностей малого и большого радиусов.

При построении овала учитываем равенство следующих параметров:

$$EC=CK; AP=PK.$$

Также необходимо заметить, что PO_2 является серединным перпендикуляром к АК, а точки O_1 и O_2 получены в местах пересечения перпендикуляра с осями координат.

Полученный овал состоит из набора дуг, полученных вращением: AO_1 на угол α_1 и TO_2 на угол α_2 . Нетрудно доказать, что треугольники AOC , APM , PMO_1 , PCF , PFO_2 , O_1OO_2 подобные согласно правилу подобия прямоугольных треугольников. Отметим, что PM является перпендикуляром к AO_1 .

Далее найдем длину дуги, образующую овал.

$$L = 4 \cdot \alpha_1 \cdot O_1A + 4 \cdot \alpha_2 \cdot TO_{21}.$$

Найдём TO_{21} и AO_1 , для этого определим углы α_1 и α_2 .

$$\alpha_2 := a \cos\left(\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}\right) \cdot \frac{180}{\pi};$$

$$\alpha_1 := 90 - \alpha_2.$$

Далее находим PC , PF , AM .

$$PC := a \cdot \frac{1 - e + \sqrt{1+e^2}}{2};$$

$$PF := PC \cdot \sin\left(\frac{\alpha_2 \cdot \pi}{180}\right);$$

$$AM := a - PF.$$

Для того чтобы найти AO_1 , необходимо найти PM , MO_1 .

$$PM := \frac{AM}{\tan g\left(\frac{\alpha_2 \cdot \pi}{180}\right)};$$

$$MO_1 := \frac{PM}{\tan g\left(\frac{\alpha_2 \cdot \pi}{180}\right)}.$$

Из полученных уравнений находим AO_1

$$AO_1 := AM + MO_1.$$

Далее найдём величину TO_{21}

$$TO_{21} := AO_1 + \frac{(a - AO_1)}{\cos\left(\frac{\alpha_2 \cdot \pi}{180}\right)}.$$

Площадь боковой поверхности полученной фигуры можно найти следующим образом:

$$S_{бок} := L \cdot h.$$

Для нахождения объёма полученной фигуры необходимо найти площадь секторов, образованных вращением радиусов, за исключением большого сектора, площадь которого превосходит искомую величину.

Для малого сектора справедливо следующее:

$$S_{повм} := \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot AO_1^2.$$

Для большого сектора находим:

$$S_{новб} := \alpha_1 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot TO_{21}^2 - S_{mp};$$

$$OO_2 := (a - AO_1) \cdot \tan g\left(\frac{\alpha_2 \cdot \pi}{180}\right);$$

$$OO_1 := a - AO_1; \quad S_{mp} := 0.5 \cdot OO_1 \cdot OO_2,$$

где S_{mp} – площадь треугольника, не входящая в цилиндр.

Тогда формулу объёма цилиндра можно записать в виде:

$$V := 4 \cdot (S_{новм} + S_{новб}) \cdot h.$$

Согласно полученным данным можно создать анатомически правильный аналог геометрической модели тела человека.

Так как цель практических работ была в создании метода для применения результатов математического моделирования в процессе проектирования теплозащитной одежды для защиты от холода, то все последующие приводимые расчеты и алгоритмы направлены на практическое применение результатов и рассматриваемой работы.

Каждая часть используемой геометрической модели, представленная цилиндром или эллиптическим цилиндром, является прототипом части системы. При этом внутренне пространство каждого элемента есть однородная среда, физические характеристики которой определены в соответствии с установившимся процессом теплопередачи. Учтем также то, что температура составляющих систему в определённых условиях (постоянного внешнего воздействия) будет изменяться незначительно.

Математическое описание процесса формирования теплового потока значительно упростится, если, исходя из анатомической структуры тела человека и слоистой природы одежды, представим модель в виде нескольких слоёв, отвечающих определённым тканям тела и материалам одежды.

Согласно геометрическому представлению для новой геометрической модели туловища человека можно выделить сектора цилиндрических участков, из которых состоит вся модель туловища независимо от выбранной части туловища. При этом предположим, что каждый слой обладает постоянными теплофизическими свойствами. В одежде количество слоёв примем равным одному, при этом объединив число разнородных материалов в пакете для упрощения расчетов. Таким образом, зная теплофизические свойства материалов входящих в пакет, можно будет в последствии сформировать пакет с идентичными теплозащитными свойствами. Поставленная задача заключается в построении математических моделей простейших элементов и выявления взаимодействий между ними.

Для цилиндрических участков модели, равномерно покрытых теплоизолирующим пакетом, можно считать тепловые поля осесимметричными. Это позволит описать каждый из этих участков, используя выражение для определения количества тепла с поверхности:

$$q_i = \frac{S_i(t_i - t_B)}{\left[\frac{1}{\alpha(r_i + \delta_i)} + \frac{1}{\lambda_p} \ln\left(\frac{\delta_i}{r_i} + 1\right) \right] r_i};$$

где $i = 1, 4$ и соответствует порядковому номеру части тела;

S_i – площадь поверхности i -го участка модели, м^2 ;

r_i – радиус i -го участка модели, м ;

α – коэффициент теплопередачи от поверхности теплоизолирующего слоя в окружающую среду, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$;

t_i – температура поверхности соответствующих участков тела человека, $^\circ\text{C}$;

t_B – температура воздуха, $^\circ\text{C}$;

δ_i – толщина пакета, м ;

λ_p – средняя теплопроводность пакета, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$.

Тепловой поток с модели головы нельзя считать симметричным так как она не полностью закрывается одеждой. Отсутствие симметрии теплового потока существенно затрудняет математическое моделирование. В решаемой задаче идеализации головы в виде шара в большей степени условна, чем представление других частей тела в виде цилиндров. Это связано с тем, что она полностью закрывается теплоизолирующим пакетом. Следует заметить, что лицо открыто, а это нарушает симметрию теплового потока с ее поверхности.

Необходимо оценить возможную погрешность, обусловленную несимметрией теплового потока. Доля площади поверхности головы во всей модели составляет 7 %. Величина теплового потока с поверхности головы при ходьбе в комфортных условиях по данным, приводимым в [12], -18,1 % от всех теплопотерь с поверхности тела человека, что составляет 23,51 Вт. Если считать, что открытая часть модели головы составляет 20 % от ее общей площади или 0,0245 м^2 , то можно определить величину теплопотерь с этой поверхности в окружающую среду. Если принять коэффициент теплопередачи с открытой головы равным 10 $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ при температуре воздуха $t_B = -10^\circ\text{C}$, температуру головы $t_r = 26^\circ\text{C}$, то плотность теплового потока с поверхности головы составит $q = \alpha(t_r - t_B) = 360 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Эта величина хорошо согласуется с экспериментальным результатом: $q = 346 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

При температуре -50°C плотность теплового потока с поверхности головы составит по той же формуле 760 $\text{Вт}/\text{м}^2$. Если температура головы меньше 26°C , величина плотности потока соответственно уменьшится.

Поток тепла с поверхности головы определяется как:

$$Q = qS = 93,25 \text{ Вт}.$$

Если считать, что открыта при температуре -50°C одна десятая часть поверхности головы, то поток с этой части составит всего лишь 9,3 Вт. Исходя из величины теплового потока с поверхности головы в комфортных условиях 23,5 Вт, можно определить поток 1/10 части головы, который составит 2,35 Вт. Если исходить при расчете теплозащиты из того, что одежда будет, по возможности, сохранять величину потока, характерную для комфортного состояния, то отли-

чие составит 6,95 Вт. Если считать, что голова полностью закрыта теплозащитным пакетом, погрешность составит 5,3 %. С этой погрешностью возможно рассматривать систему «модель головы – пакет – окружающая среда» с центральной симметрией. Тепловой потока в такой системе описывается выражением:

$$q_i = \frac{\pi(t_i - t_B)}{\frac{1}{2\lambda_p} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + \delta_i} \right) + \frac{1}{\alpha(r_i + \delta_i)^2}}.$$

Количество утеплителя на голове человека предлагается находить из (3.26) и учитывать его после всех расчетов и оптимизации, так как тепловое состояние головы человека является одним из самых критических, и впоследствии может сказаться рядом заболеваний, трудно поддающихся лечению. Рассчитанное количество утеплителя подтверждено практикой и работами Бринка И.Ю.

На основании формулы суммарное количество тепла с поверхности одного из эллиптических цилиндров можно описать выражениями:

$$\begin{cases} q_{i1} = \frac{2al_1h_i(t_{i1} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{i1} + x_{i1})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{i1}}{r_{i1}} + 1)} + \frac{2al_2h_i(t_{i1} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{i2} + x_{i1})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{i1}}{r_{i2}} + 1)}; \\ q_{i2} = \frac{2al_1h_i(t_{i2} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{i1} + x_{i2})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{i2}}{r_{i1}} + 1)} + \frac{2al_2h_i(t_{i2} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{i2} + x_{i2})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{i2}}{r_{i2}} + 1)}, \end{cases}$$

где первое выражение описывает поток тепла спереди туловища, а второе соответственно сзади;

al_1, al_2 – длины дуг, описывающих эллиптический сектор спереди и

сзади;

$ri1, ri2$ – эквивалентные радиусы дуг, составляющих эллиптический цилиндр, м;

x_{i1}, x_{i2} – толщины пакета утеплителя (утепляющего материала), м.

Таким образом, процесс теплообмена человека с окружающей средой можно разбить на ряд видов: между конечностями и окружающей средой; между головой и окружающей средой; между туловищем человека и окружающей средой.

Первые два вида достаточно подробно рассмотрены в работах где используется классический в данном вопросе подход к геометрическому представлению элементов тела человека.

В нашем случае уравнение полного количества тепла с тела человека будет иметь вид:

$$Q_{\max} = \sum_{i=2}^4 (q_{i1} + q_{i2}) + \sum_{i=5}^7 \frac{\pi(t_i - t_B)}{\frac{1}{2\lambda_p} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + \delta_i} \right) + \frac{1}{\alpha(r_i + \delta_i)^2}},$$

где $Q_{\max}$ – величина теплового потока с поверхности модели, Вт.

Решение задачи сводится к нахождению такого сочетания толщины пакета на отдельных участках модели, которая реализует минимум потока тепла с ее поверхности при ограничении на объем массы пакета. В классическом подходе такое уравнение нормировки по массе утеплителя учитывает толщину утеплителя не только на голове испытуемого, но и постоянную толщину для всего туловища. Выражение под знаком суммы описывает объем цилиндрического слоя изоляции толщиной δ_i окружающей цилиндрическую поверхность радиусом r_i и площадью S_i . Поскольку заданным является ограничение по массе для комплекта снаряжения, то будем использовать подобный вариант нормировки.

Следующее выражение удобно для упрощения расчетов:

$$\sum_{i=2}^7 (\delta_i^2 + 2r_i \delta_i) \frac{S_i}{2r_i} = V, \text{ где } V - \text{объем теплоизолирующего слоя, м}^3.$$

Математическая модель должна учитывать геометрические параметры тела и топографию температуры кожи, поэтому распределение толщин по элементам модели будем считать пропорциональным площади данного элемента:

$$\sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^2 ((x_{ij}^2 + 2r_{i1} x_{ij}) \cdot al_1 h_i + (x_{ij}^2 + 2r_{i2} x_{ij}) \cdot al_2 h_i) + \sum_{i=5}^7 (x_i^2 + 2r_i x_i) \pi h = V.$$

Здесь и далее x_{ij} , δ_{ij} обозначают искомые толщины слоёв утеплителя, применяемого в модели. При заданных температурах участков тела вышеописанные соотношения и представляют математическую модель теплообмена системы «Ч-О-С». Количество тепла с тела человека можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} q_{21} &= \frac{2al_2 h_2 (t_{21} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{21} + x_{21})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{21}}{r_{21}} + 1)} + \frac{2al_2 h_2 (t_{21} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{22} + x_{21})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{21}}{r_{22}} + 1)}; \\ q_{22} &= \frac{2al_2 h_2 (t_{22} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{21} + x_{22})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{22}}{r_{21}} + 1)} + \frac{2al_2 h_2 (t_{22} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{22} + x_{22})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{22}}{r_{22}} + 1)}; \\ q_{31} &= \frac{2al_2 h_3 (t_{31} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{31} + x_{31})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{31}}{r_{31}} + 1)} + \frac{2al_2 h_3 (t_{31} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{32} + x_{31})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{31}}{r_{32}} + 1)}; \\ q_{32} &= \frac{2al_2 h_3 (t_{32} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{31} + x_{32})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{32}}{r_{31}} + 1)} + \frac{2al_2 h_3 (t_{32} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{32} + x_{32})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{32}}{r_{32}} + 1)}; \end{aligned}$$

$$q_{41} = \frac{2al_2h_4(t_{41} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{41} + x_{41})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{41}}{r_{41}} + 1)} + \frac{2al_2h_4(t_{41} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{42} + x_{41})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{41}}{r_{42}} + 1)};$$

$$q_{42} = \frac{2al_2h_4(t_{42} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{41} + x_{42})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{42}}{r_{41}} + 1)} + \frac{2al_2h_4(t_{42} - t_{vn})}{\frac{1}{\alpha(r_{42} + x_{42})} + \frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x_{42}}{r_{42}} + 1)};$$

$$q_5 = \frac{\pi(t_5 - t_B)}{\frac{1}{2\lambda_p} \left(\frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_5 + \delta_5} \right) + \frac{1}{\alpha(r_5 + \delta_5)^2}};$$

$$q_6 = \frac{\pi(t_6 - t_B)}{\frac{1}{2\lambda_p} \left(\frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_6 + \delta_{i6}} \right) + \frac{1}{\alpha(r_6 + \delta_6)^2}};$$

$$q_7 = \frac{\pi(t_7 - t_B)}{\frac{1}{2\lambda_p} \left(\frac{1}{r_7} - \frac{1}{r_7 + \delta_7} \right) + \frac{1}{\alpha(r_7 + \delta_7)^2}};$$

$$\sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^2 ((x_{ij}^2 + 2r_{i1}x_{ij}) \cdot al_1h_i + (x_{ij}^2 + 2r_{i2}x_{ij}) \cdot al_2h_i) + \sum_{i=5}^7 (x_i^2 + 2r_ix_i)\pi h = V$$

Полученные уравнения позволяют определить необходимое количество утеплителя (изолятора) для эффективной защиты людей в условиях агрессивного воздействия температур.

Определение минимума потока Q_{max} с ограничением возможно методом множителей Лагранжа для нахождения точек условного экстремума функции.

Зная объём утеплителя, а также количество утеплителя необходимого на каждом участке модели, с учетом последней системы уравнений требуется найти такое распределение утеплителя по поверхности модели, чтобы суммарное его количество было равно заданному, а поток тепла с каждого элемента системы был минимален.

Используя метод неопределённых множителей Лагранжа, получим выражение функции Лагранжа.

$$L = Q_{max} + k(V - \sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^2 ((x_{ij}^2 + 2r_{i2}x_{ij}) \cdot al_1h_i + (x_{ij}^2 + 2r_{ij}x_{ij}) \cdot al_2h_i) - \sum_{i=5}^7 (x_i^2 + 2r_ix_i)\pi h).$$

Составляем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_{21}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_{22}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_{31}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_{32}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_{41}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_{42}} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial q_5} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_6} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_7} = 0; \\ \sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^2 ((x_{ij}^2 + 2r_{i1}x_{ij}) \cdot al_1h_i + (x_{ij}^2 + 2r_{i2}x_{ij}) \cdot al_2h_i) + \sum_{i=5}^7 (x_i^2 + 2r_ix_i)\pi h = V. \end{aligned} \right\}$$

Задача отыскания экстремума сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно неизвестных δ_{ij} , $i=\overline{2,7}$, $j=\overline{1,2}$ и k – множителя Лагранжа.
 $F(x)=0$.

Для решения системы нелинейных уравнений было решено применить метод Ньютона, так как из практики и из предыдущих исследований [16] известны достаточно хорошие начальные приближения к решению системы уравнений при любых внешних температурных воздействиях. Таким образом, в окрестности имеющегося приближения на i -м шаге, заменяем задачу на некоторую вспомогательную линейную. При этом нужно учесть, чтобы погрешность замены имела более высокий порядок малости, чем первая, в окрестности имеющегося приближения. За следующее приближение выбираем решение этой вспомогательной задачи. Таким образом, на каждом последующем шаге определяем:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}.$$

Критерием остановки при решении данной задачи, будет являться соотношение следующего значения вектора решения с новыми значениями функции и относительной, абсолютной погрешностями:

$$|corfaci| \cdot reltol \cdot |x_{i,new}| + abstol,$$

где $reltol$ – значение относительной погрешности,
 $abstol$ – значение абсолютной погрешности,
 $corfaci$ – значение отношения старого значения функции к его производной,
 $x_{i,new}$ – новое решение.

Математическая оптимизационная модель с использованием ЭВМ, позволяет получить основные параметры, характеризующие стационарный теплообмен системы «человек – одежда – окружающая среда», а также толщину теплоизолирующего пакета.

Данная математическая модель была проверена при помощи имитационного моделирования туловища человека, которое имеет сложную многослойную структуру и центры выделения тепла в виде теплотворных органов и центральных слоёв – «ядра».

Учитывая то, что поперечное сечение модели туловища человека представлено в виде последовательности слоев на плоскости («ядро», «мышцы», «жир», «кожа»), где в рамках слоя «ядро» подразумевается наличие внутренних органов, будем полагать, что в различных местах, в зависимости от расположения конкретных органов туловища, температурные показатели системы различны.

Согласно реальное расположение органов в туловище по высоте h можно выразить соотношением:

$$(0.27+0.11+0.3+0.16+0.16)h=h,$$

где h – высота всего туловища человека в представленной модели; 27 % – высота нижнего сектора; 11 % – высота сектора представляющего почки (часть печени тоже входит в этот цилиндр по всей высоте); 30 % – высота сектора, в котором расположена печень; 16 % – высота сектора, в котором непосредственно присутствует сердце; 16 % – высота верхнего сектора грудной клетки.

Исследовав образовавшуюся структуру внутреннего строения туловища с точки зрения его теплового состояния, были получены несколько горизонтальных срезов на модели второго уровня, которые с помощью дискретной модели теплообмена системы методом Бубнова-Галеркина с использованием конечно-элементного базиса метода конечных элементов были проверены с целью исследования распределения тепла внутри и на поверхности тела человека.

Математическая модель реализована на языке внутреннего представления алгоритмов «Maple» для машин с процессором «Pentium 3» или аналогичным. Программа портирована на язык высокого уровня «C++» и выполнена в виде отдельно запускающегося файла с набором библиотек. Программе присвоено название «Расчет теплового поля тела человека на плоскости».

Для проверки результатов расчетов, полученных на математической модели первого уровня, были проведены расчеты температурного поля туловища человека на модели второго уровня.

Исходными параметрами для расчетов были взяты:

- геометрические параметры модели и координаты размещения внутренних теплотворных органов;
- количество тепла, вырабатываемое внутренними слоями туловища и органами, а также тепловые параметры всех слоёв, составляющих туловище;
- параметры используемого утеплителя и его толщина (согласно методике главы 2 для температуры воздуха -10°C);
- температура окружающей среды -10°C.

Последовательно были рассчитаны пять сечений на каждом из пяти участков модели туловища.

Таблица 5. Сравнение результатов математического моделирования на уровне расположения сердца и экспериментально полученных данных

№ точки измерения	Математический расчет, °C	Экспериментальный расчет, °C	Размах варьирования	Погрешность, %
1	32,5	32,73	0,23	0,70
4	32,1	32,35	0,25	0,77
6	31,5	29,59	1,91	6,45
7	32,5	32,17	0,33	1,02
9	31,5	31,73	0,23	0,72
11	30,8	30,43	0,37	1,21
13	31,2	31,05	0,15	0,48
15	31,8	31,8	0	0
Среднее	31,73	31,48	0,43	1,42
Дисперсия	0,32			

Согласно с данными из главы 2 высота всего туловища принята 0.677 м. Уровни срезов с размещенными органами будут: сердце (0.55 м, отсчет с нижней части модели,; печень (0.45 м,); почки и печень одновременно (0.24 м,). Оставшиеся срезы проходят на уровнях: плечи (0.65 м); низ бедра (0.1 м).

Для проверки результатов математического моделирования были проведены натурные эксперименты (таблица 5).

Отклонение расчетного значения от экспериментального в точке №3 связано с неплотным прилеганием датчика измерения к поверхности кожи. Остальные отклонения вызваны погрешностью измерений и допущениями при создании математической и геометрической модели туловища человека. Разработанное оборудование и программное обеспечение позволяют зафиксировать температуру на поверхности тела человека, при помощи датчиков температур, размещенных при помощи 5-ти точечного метода [2].

Результаты измерений в условиях термокамеры при -10°C , а также соответствующие температуры, заданные в качестве базовых в оптимизационной модели и полученные в результате моделирования на имитационной модели.

Оценив данные, полученные для других секторов, можно сделать следующие выводы. Имитационная модель подтвердила результаты математического моделирования, полученные на оптимизационной модели. Следовательно, оптимизационная модель может быть применена для расчета параметров одежды в среднем диапазоне температур.

В результате получено новое модельное описание человека, которое отличается от разработанных ранее представлений геометрическим изображением туловища. Исследование процессов теплообмена тела человека при таком подходе позволит более рационально распределить утеплитель на поверхности модели, чтобы гарантировать человеку комфортные условия в климатических зонах с пониженной температурой.

Аналогичным образом строится геометрическая модель женского тела. Естественно, каноническое представление не подходит для построения моделей людей с нестандартной комплекцией, как для мужчин, так и для женщин. Измененные параметры секторов туловища и гибкая система аппроксимации позволит реализовать эту возможность с применением подобных уточнённых моделей. Применение канонических модельных представлений может быть реализовано лишь для конечностей, которые имеют незначительные отличия.

Новое представление туловища человека в виде набора эллиптических цилиндров актуально и обосновано задачей несимметричности тепловых потоков с туловища человека

Программное обеспечение, разработанное авторами, для обоснованного выбора пакетов материалов для спецодежды и обуви, с учетом их теплофизических характеристик, подтверждает эффективность их использования в том числе и наличием авторских свидетельств, полученных авторами и широко используемые не только в учебном процессе, но что особенно важно, производителями спецодежды и обуви. особенно актуальными стали эти вопросы при принятии решений о формировании военного контингента с несением службы на

постоянной основе в Арктике, где условия предполагают наличие такого обмундирования, которое гарантировало бы военнослужащим комфортность при исполнении и их служебных обязанностей. Отрадно, что все те, кто участвовал в разработки методов оценки теплофизических характеристик, привлечены ученые и их рекомендации становятся основными при выборе окончательного решения, не только по составу пакетов материалов, но и по времени эксплуатации такой одежды, что особенно важно. Сейчас ведутся разработки теплоутеплителей с малой массой и широкой гаммой их обработки, чтобы такие комплекты были востребованы военнослужащими и не создавали им неудобств.

Изложенные способы оценки теплофизических характеристик дают потребителя выбор, но при этом необходимо обосновывать подбор материалов с учетом тех требований, которые сформулированы потребителями и такая возможность теперь имеется. Важно, чтобы исследователи не останавливались в поиске решений по изготовлению новых материалов, которые были бы востребованы потребителями и удовлетворяли весь перечень характеристик, создающие комфортные условия носчикам в период исполнения их обязанностей. Здесь важно не повторять ошибки, которые были допущены производителями при реализации рекомендаций ученых и ведущего модельера В. Юдашкина, а именно – погоня за снижением себестоимости производителями были заменены утеплители на более дешевый материал, что привело к простудным заболеваниям военнослужащих и невозможности использования этих костюмов при выполнении их должностных обязанностей.

Список используемых источников:

1. Афанасьева Р.Ф. Некоторые способы поддержания температурного гомеостаза в условиях воздействия на человека холодового фактора // Теоретические и практические проблемы терморегуляции. Ашхабад, 1982. 152 с.
2. Афанасьева Р.Ф. Гигиенические основы проектирования одежды для защиты от холода. М.: Легкая индустрия, 1977. 136 с.
3. Белгородский В.С. Разработка методов и средств повышения комфортности обуви: автореф. дис.... канд. тех. наук. М., 2001. 22 с.
4. Бузов Б.А., Никитин А.В. Исследования материалов для одежды в условиях пониженных температур. М.: Легпромбытиздат, 1985. 221 с.
5. Жихарев А.П., Бузов Б.А. Установка для исследования физико-механических свойств материалов в широком интервале температур // Текстильное материаловедение. М., 1980. С. 35-38.
6. Жихарев А.П., Краснов А.П., Петропавловский Д.Г. Практикум по материаловедению в производстве изделий легкой промышленности. М.: Академия, 2004. 464 с.
7. Жихарев А.П. Развитие научных основ и разработка методов оценки качества материалов для изделий легкой промышленности при силовых, температурных и влажностных воздействиях: дис....д-ра техн. наук. М., 2004. 374 с.
8. Кедров Л.В. Теплозащитные свойства обуви. М.: Легкая индустрия, 1979. 168 с.
9. Лебедева Л.Д. Определение теплозащитных свойств с помощью моделирования процесса охлаждения стопы человека: дис....канд. техн. наук. М., 1976.
10. Лыков А.В. Методы определения теплопроводности и температуропроводности. М., 1973. 336 с.
11. Михайлова И.Д., Прохоров В.Т., Михайлов А.Б., Осина Т.М. Математическая модель микроклимата в обуви при воздействии на нее низких температур // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2005. №2. С. 50-54.
12. Михайлова И.Д., Прохоров В.Т., Михайлов А.Б., Осина Т.М. Особенности распределения температуры в деталях обуви // Кожевенно-обувная промышленность. 2005. №5. С. 47-49.
13. Фомина Т.Т., Утту Т.С. Оценка комфортности обуви. М.: МТИЛП, 1988. 36 с.

14. Прохоров В.Т. и др. Особенности защиты человека от воздействия низких температур: Монография. Шахты: издательство ГОУ ВПО "ЮРГУЭС", 2007. 499 с.

15. Горбачик В.Е., Кузнецов А.А., Томашева Р.Н., Ринейский К.Н., Леонов В.В. Оценка теплозащитных свойств пакетов верха производственной обуви // Вестник Витебского государственного технологического университета. 2015. № 28. С. 41.

© 2015, Селина Н.Г., Кораблина С.Ю., Осина Т.М.,
Афанасьева Р.Ф., Прохоров В.Т.
Оценка обоснованности выбора пакетов
материалов по формированию комфортных
условий военнослужащим Арктики (сообщение 2)

© 2015, Selina N.G., Korablina S.Yu., Osina T.M.,
Afanasyeva R.F., Prokhorov V.T.
Assessment of the validity of the choice of materials
for the formation of a package of comfortable
conditions servicemen Arctic (2 message)