DOI: 10.17117/na.2015.12.02.084

Поступила (Received): 28.12.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.12.02.084.pdf>

Кабаева Е.В.
Современное состояние классической
интервальной арифметики

Kabaeva E.V.
The modern state of classical interval arithmetic

В статье рассмотрено современное состояние классической интервальной арифметики. Приведен пример, как неучтенные ошибки вычислений приводят к повышенному риску. Приведены основные положения интервального подхода к вычислениям на ЭВМ: исходные данные и промежуточные результаты представляются граничными значениями, над которыми и производятся все операции

Ключевые слова: интервал, неопределенность, интервальный анализ, направленные округления

The article considers the current state of classical interval arithmetic. Shows an example of how unaccounted-for calculation errors lead to an increased risk. The main propositions of the interval approach to computations on a computer: raw data and intermediate results are submitted to the boundary values, and over which all the transactions are made

Key words: interval, uncertainty, interval analysis, directed rounding

Кабаева Елена Валерьевна

Старший преподаватель

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова

г. Абакан, пр. Ленина, 90

Kabaeva Elena Valeryevna

Senior Lecturer

Khakas state university named N.F. Katanov
Abakan, Lenin ave., 90

Одной из причин использования интервальных методов является то, что современные классические ЭВМ не учитывают, степень неточности большинства исходных данных. Даже невинно выглядящее дробное число $1/10$ может порождать в определенных случаях вычислительную проблему, т. к. компьютер не может выполнять точные вычисления с этим числом [1]. В той мере, в какой точные вычислительные результаты используются для принятия критических решений, неучтенные ошибки вычислений означают повышенный риск. Очевидно, что чем сильнее зависимость точности входных данных от точности вычисляемых значений, чем более важной для последних является их корректность, и тем больше допускаемый риск. Например, широко известен такой классический пример, как катастрофа с американской зенитной ракетой Patriot 25 февраля 1991 года в Дхаране (Саудовская Аравия) [2]. Он показывает, что может произойти, если существующие вычисления с плавающей точкой будут и далее некритично применяться к новым задачам. В тот день батарея ракет Patriot не смогла перехватить иракскую ракету Scud, по официально названной причине: неадекватное вычисление в формате с плавающей точкой. Дело в том, что

система управления ракеты Patriot имеет внутренние системные часы, отсчитывающие время в десятых долях секунды, т. е. для перевода времени в формат с целыми секундами компьютер просто умножает данные на $1/10$. Однако, как уже упоминалось выше, на современных классических ЭВМ дробь $1/10$ не имеет точного внутреннего представления, и должна быть приближена подходящей двоичной дробью. В качестве такого приближения американские разработчики взяли 24-битное двоичное число $0.00011001100110011001100$, которое меньше, чем $1/10$, примерно на одну миллионную. Эта на первый взгляд ничтожно малая погрешность постепенно накапливалась и после четырех дней непрерывной работы расхождение системного времени с точным достигло $1/3$ секунды, что, в конечном счете, привело к ошибке наведения в 700 метров. В результате ракета, выпущенная на перехват Skud, попала в помещение с американскими военнослужащими, убив 28 человек [2].

Вышеприведенный и подобные ему (не столь катастрофичные) случаи, наглядно демонстрируют, что являющиеся основой современных цифровых ЭВМ числа в формате с плавающей точкой, оказываются не вполне адекватными как реальному физическому миру, так и его математическим моделям, в частности, математическому понятию вещественного (действительного) числа. Основные недостатки современного представления чисел с плавающей точкой заключаются в следующем:

- большинство чисел вещественной оси не могут быть представлены точно числами с плавающей точкой, имеющими конечную длину мантиссы, и, соответственно, свойства арифметических операций над числами с плавающей точкой отличаются (из-за неизбежных округлений) от свойств идеальных математических операций над вещественными числами;

- число в формате с плавающей точкой не несет никакой информации о точности той величины, которую оно представляет.

Получается, что существующая модель вычислений с плавающей точкой не предназначена ни для адекватного представления исходных значений, ни для отслеживания вычислительных ошибок. В связи с этим постепенно усиливается тенденция к переходу от точечных значений к интервальным, что влечет за собой стремительное развитие интервальной арифметики.

Интервальный тип данных и интервальная арифметика реализуются на современных ЭВМ, как правило, с помощью представления интервала в виде пары чисел – одного для левого конца интервала, а другого для правого. При этом существующее аппаратное обеспечение, в частности, арифметика чисел с плавающей точкой, используются без каких-либо изменений, так как корректность получающейся интервальной арифметики может быть обеспечена так называемыми направленными округлениями. Например, там, где в задачах внешнего интервального оценивания в процессе вычислений требуется округление результата, нижняя граница интервала должна округляться вниз, а верхняя граница интервала – вверх. Таким образом, даже неизбежные ошибки округления при вычислениях с плавающей точкой будут строго и систематически учитываются в процессе выполнения интервальной программы. В качестве примера, на рис. 1 показано, как иррациональные числа $\sqrt{2}$ и π в различных

числовых шкалах представлены в виде различных интервалов (числовых промежутков), причем наглядно проиллюстрировано изменение «ширины» этих интервалов. Интервалы чисел, представленных в вещественном формате (шкала floats) являются достаточными, так как в границы интервалов включены и ошибки округления исходных иррациональных чисел: $\sqrt{2} \in [1.25, 1.5]$; $\pi \in [3.0, 3.5]$.

Рис. 1. Представление иррациональных чисел в виде интервалов (*integers* – целые числа, *rationals* – рациональные числа, *floats* – вещественные числа) [1, с. 485]

Данный пример отражает основные положения интервального подхода к вычислениям на ЭВМ: исходные данные и промежуточные результаты представляются граничными значениями, над которыми и производятся все операции. При этом сами операции (прежде всего арифметические) определяются таким образом, что результат соответствующей точной операции обязательно лежит внутри вычисляемых границ.

Иллюстрацией интервального подхода могут служить следующие правила выполнения операций вещественной интервальной арифметики:

$$\begin{aligned}
 [x_1, x_2] + [x_3, x_4] &= [x_1 + x_3, x_2 + x_4]; \\
 [x_1, x_2] - [x_3, x_4] &= [x_1 - x_4, x_2 - x_3]; \\
 [x_1, x_2] \times [x_3, x_4] &= [\min(x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4), \\
 &\quad \max(x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4)]; \\
 [x_1, x_2] / [x_3, x_4] &= \left[\min\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_2}{x_4}\right), \max\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_2}{x_4}\right) \right], \\
 &\text{где } 0 \notin [x_3, x_4].
 \end{aligned}$$

Возникающая при вычислении границ погрешность учитывается с помощью направленных округлений: меньшая из вычисленных границ получается округлением до ближайшего машинного числа с недостатком, а большая – с избытком. Таким образом, интервальный подход позволяет единообразным способом учесть все виды погрешностей вычислительного процесса: приближенно известные исходные данные заключаются в гарантированно содержащие точное значение границы. Погрешности округлений лишь несколько расширяют границы промежуточных результатов, а сам вычислительный метод строится так, чтобы его погрешность также включалась в вычисленные границы конечного результата [3].

Список используемых источников:

1. Hayes B. A Lucid Interval. A reprint from American Scientist the magazine of Sigma Xi // Scientific Research Society. Vol. 91. Number 6. November–December 2003. P. 484-488.
2. Строгий учет ошибок округлений на цифровых ЭВМ.
URL: <http://www.sbras.ru/interval/index.php?j=Introduction/RusIntro>
3. Кулиш У., Рац Д., Хаммер Р., Хокс М. Достоверные вычисления. Базовые численные методы. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

© 2015, Кабаева Е.В.

Современное состояние классической
интервальной арифметики

© 2015, Kabaeva E.V.

The modern state of classical interval arithmetic