DOI: 10.17117/na.2015.11.04.372

Поступила (Received): 19.11.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.11.04.372.pdf>**Сухов С.А.****Частное решение уравнения вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости****Sukhov S.A.****Particular solution of equations of rotationally symmetric motion of an incompressible viscous fluid**

Локализованные вихревые движения, наблюдаемые в природе и технике, демонстрируют свою сложность и многообразие. В настоящей работе приведены уравнения вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат. В рамках этой модели с заданными граничными условиями на бесконечности получено и исследовано частное аналитическое решение

Ключевые слова: локализованные вихри, профили скорости, цилиндрическая система координат, вихревая нить, завихренность

Сухов Станислав Александрович

Кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-программист

Экотехнологии

г. Ставрополь, ул. Октябрьская, 184

Localized vortex motions observed in nature and technique demonstrate their complexity and diversity. In the current paper equations of rotationally symmetric motion of an incompressible viscous fluid in a cylindrical coordinate system are presented. Within the framework this model with the given boundary conditions at infinity the particular analytical solution is founded and investigated

Key words: localized vortexes, velocity profiles, cylindrical coordinate system, vortex filament, vorticity

Sukhov Stanislav Alexandrovich

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Lead software engineer

Ecotechnologies

Stavropol, October st., 184

Локализованные вихревые движения, наблюдаемые в природе и технике, демонстрируют свою сложность и многообразие. Поэтому возникают трудности при их теоретическом и экспериментальном исследованиях [1]. Представляется важным получение и исследование приближенных математических моделей, которые сохраняют характерные свойства реальных локализованных вихрей. В данной работе приводится математическая модель вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости, и обсуждаются решения, полученные в рамках этой модели.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости вместе с уравнением неразрывности в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = g_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \nu \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{r \partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где u, v, w – радиальная, азимутальная и аксиальная компоненты скорости соответственно, g_r, g_θ, g_z – проекции массовых сил, ρ – плотность, p – давление жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости. Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Рассмотрим стационарное вращательно-симметричное движение вязкой жидкости. Плотность жидкости считается равной единице, и отсутствуют массовые силы ($\mathbf{g} = 0$). Ось z цилиндрической системы координат (r, θ, z) совмещена с осью симметрии вихря. Тогда система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} u u_r - \frac{v^2}{r} = -p_r + \nu \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - \frac{u}{r^2} \right), \\ u v_r + \frac{uv}{r} = \nu \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{v}{r^2} \right), \\ u w_r = \nu \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right), \\ r u_r + u = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть имеется установившееся течение с одной лишь азимутальной составляющей скорости, зависящей от радиальной координаты. Тогда система (3) сведется к уравнению для v

$$r^2 v_{rr} + r v_r = v, \quad (4)$$

общее решение которого имеет вид

$$v(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (5)$$

При граничных условиях $v(0) = 0, v(R) = \Omega R$, уравнение (4) имеет решение в виде квазитвердого вращения $v = \Omega r$ [1], где Ω – угловая скорость вращения.

Радиальная и осевая скорости выражаются через функцию тока ψ следующим образом

$$u = -\frac{1}{r} \psi_z, \quad w = \frac{1}{r} \psi_r. \quad (6)$$

Будем искать такие решения системы, которые зависят от радиальной координаты r , и поле скоростей затухает на бесконечности.

С учетом заданных ограничений решением системы (3) в общем виде является

$$u = \frac{c_1}{r}, \quad (7)$$

$$v = \frac{c_4 v}{c_1 + 2v} r^{\frac{c_1+v}{v}} + \frac{c_5}{r}, \quad (8)$$

$$w = \frac{c_2 v}{c_1} r^{\frac{c_1}{v}} + c_3, \quad (9)$$

$$p = -\frac{c_1^2 + c_5^2}{2r^2} + \frac{c_4^2 v^3}{(c_1 + 2v)^2 (2c_1 + 2v)} r^{\frac{2c_1+2v}{v}} + \frac{2c_4 c_5 v^2}{(c_1 + 2v) c_1} r^{\frac{c_1}{v}} + c_6, \quad (10)$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – постоянные коэффициенты. Для затухания азимутальной компоненты скорости на бесконечности необходимо чтобы выполнялось условие $c_1 < -v$.

На рисунке 1 изображена картина профилей скорости и давления при следующих значениях параметров $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, c_5 = 1, c_6 = -3, v = 2$.

Рис. 1. Распределение скоростей и давления в вихре

Из рисунка 1 видно, что в приосевой зоне распределение азимутальной скорости аналогично полю скорости вблизи вихревой нити с бесконечно тонким ядром. Как и для бесконечно тонкой вихревой нити давление на оси стремится к $-\infty$. Распределение радиальной компоненты скорости соответствует распределению давления, то есть жидкость движется в направлении уменьшения давления. Столь резким падением давления и объясняются разрушительные последствия смерчей [3].

Список используемых источников:

1. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. Т. 6. 736 с.

З. Мельников В.П., Смольский И.И. Механизмы атмосферных вихрей // Криосфера Земли. 1997. Т.1. № 1. С. 87–96.

© 2015, Сухов С.А.

Частное решение уравнения вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости

© 2015, Sukhov S.A.

Particular solution of equations of rotationally symmetric motion of an incompressible viscous fluid