DOI: 10.17117/na.2015.11.04.289

<http://ucom.ru/doc/na.2015.11.04.289.pdf>

Поступила (Received): 27.11.2015

Расовский М.Р., Сиделов Д.И. Применение метода размерностей к решению некоторых задач гидродинамики

Rasovsky M.R., Sidelov D.I.
The application of the method of dimensions to
the solution of some problems of hydrodynamics

Задача о движении в вязкой жидкости шара не поддается точному решению. Поэтому при исследовании движения вязкой жидкости приходится прибегать к приближенным методам. Одним из наиболее простых и эффективных приближенных методов является метод размерностей, рассмотрению которого и посвящена данная работа

Ключевые слова: гидродинамика, метод размерностей

Расовский Михаил Рафаилович

Кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический университет
г. Оренбург, ул. Советская, 19

Сиделов Дмитрий Ильич

Кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический университет
г. Оренбург, ул. Советская, 19

The problem of motion of a viscous fluid in the ball is not an exact solution. So the study of motion of a viscous fluid it is necessary to resort to approximate methods. One of the most simple and effective approximate methods is the method of dimensions, the consideration of which this work is dedicated

Key words: hydrodynamics, method of dimensions

Rasovsky Mikhail Rafailovich

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Associate Professor
Orenburg state pedagogical university
Orenburg, Soviet st., 19

Sidelov Dmitry Ilyich

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Associate Professor
Orenburg state pedagogical university
Orenburg, Soviet st., 19

Важной составной частью университетского курса «Механика сплошных сред» является изучение гидродинамических свойств вязкой жидкости. Как известно (см., напр., [1]), поле скоростей вязкой жидкости описывается уравнением Навье – Стокса

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} = \vec{f}_{o\phi} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \eta' \vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{v}), \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, $\vec{f}_{o\phi}$ – плотность объемных сил, p – давление, η и η' – коэффициенты 1-й и 2-й вязкости соответственно. С помощью этого

уравнения можно решить, например, задачу о стационарном протекании несжимаемой вязкой жидкости по горизонтальной трубе круглого сечения; решение дает известную формулу Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \nu L} \cdot R^4, \quad (2)$$

где Q – объемный расход жидкости, L – длина трубы, R – радиус ее сечения, Δp – перепад давлений на концах трубы, $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости (в этом случае η называют динамической вязкостью).

Однако в более общих случаях точное решение задачи о протекании вязкой жидкости либо сильно затруднено, либо вообще невозможно. В частности, не поддается точному решению задача о движении в вязкой жидкости даже такого высокосимметричного тела, как шар, равно как и задача об обтекании жидкостью неподвижного шара. Поэтому при исследовании движения вязкой жидкости приходится прибегать к тем или иным приближенным методам. Одним из наиболее простых и в то же время эффективных приближенных методов является метод размерностей, рассмотрению которого и посвящена данная работа.

Рассмотрим равномерное движение твердого шара через вязкую жидкость. Будем искать с помощью метода размерностей силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$, действующую со стороны жидкости на движущийся шар. Физические свойства жидкости, которые определяют характер ее течения или движения через нее материальных тел характеризуются двумя параметрами: плотностью жидкости ρ и ее динамической вязкостью η . Кроме того, движение шара описывается его скоростью v и радиусом R .

Попытаемся составить из четырех вышеперечисленных величин безразмерную комбинацию. Выпишем предварительно все необходимые размерности, исходя из уравнения (1).

$$[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}; [\eta \nabla^2 v] = [f_{\text{об}}] = H \cdot \text{м}^{-3} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}; [\nabla^2 v] = \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1};$$

отсюда

$$[\eta] = \frac{[f_{\text{об}}]}{[\nabla^2 v]} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; [v] = \frac{[\eta]}{[\rho]} = \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; [\nu] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}; [R] = \text{м}.$$

Составим безразмерную комбинацию из трех величин – ν , v и R – с некоторыми неопределенными показателями степени α, β, γ : $\nu^\alpha \cdot v^\beta \cdot R^\gamma$. Результирующая размерность: $[\nu^\alpha \cdot v^\beta \cdot R^\gamma] = \text{м}^{2\alpha} \cdot \text{с}^{-\alpha} \cdot \text{м}^\beta \cdot \text{с}^{-\beta} \cdot \text{м}^\gamma = \text{м}^0 \cdot \text{с}^0$.

Отсюда получаем систему уравнений относительно α, β и γ :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma = -\alpha.$$

Доопределим систему уравнений. В наиболее простом случае $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 1$; получаем безразмерную величину

$$\text{Re} = \frac{vR}{\nu} = \frac{\rho v R}{\eta}, \quad (3)$$

называемую числом Рейнольдса. Очевидно, что любая другая безразмерная величина, характеризующая обтекание тела жидкостью, может быть только функцией Re .

Составим, далее, из величин ρ, R и v простейшую комбинацию с размерностью силы (F_{comp}). Вновь выпишем все размерности: $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $[R] = \text{м}$, $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, $[F] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$. Пусть $F = \rho^\alpha R^\beta v^\gamma$, тогда $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} = \text{кг}^\alpha \cdot \text{м}^{-3\alpha} \cdot \text{м}^\beta \cdot \text{м}^\gamma \cdot \text{с}^{-\gamma}$.

Получаем систему уравнений для нахождения неопределенных показателей степени:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$F_{comp} = \rho R^2 v^2 \cdot f(Re), \quad (4)$$

где $f(Re)$ – некоторая функция числа Рейнольдса, для определения которой требуются дополнительные данные.

Так, из опыта известно, что при достаточно малых скоростях (ниже мы увидим, какой смысл вкладывается в это выражение) справедлива зависимость $F_{comp} \sim v$. Чтобы подобная зависимость получилась из (4) с учетом определения (3), необходимо положить для рассматриваемого случая $f(Re) = \text{const}/Re$, что легко проверяется подстановкой в (4). Сила сопротивления тогда будет задана выражением $F_{comp} = \text{const} \cdot \eta \cdot R \cdot v$, называемым формулой Стокса (более тщательный анализ показывает, что в этой формуле $\text{const} = 6\pi$). Из нее следует, что сила сопротивления не зависит от плотности жидкости ρ . Условие «малости» скорости v , очевидно, означает, что $Re = \rho v R / \eta = v R / \nu \ll 1$. Следовательно, скорость может быть и не малой, если мал радиус шара R , а кинематическая вязкость $\nu = \eta / \rho$, наоборот, велика.

Предположим теперь, что скорость v очень велика (скажем, сравнима по величине со скоростью звука в жидкости). Опыт дает для этого случая зависимость $F_{comp} \sim v^2$ (формула Ньютона). Нетрудно убедиться, что эта формула будет получаться из (4), если в последней положить $f(Re) = \text{const}$. При этом

$$F_{comp} = \text{const} \cdot \rho \cdot R^2 v^2. \quad (5)$$

В данном случае, как видим, сила сопротивления не зависит от коэффициента вязкости η , что указывает на качественное изменение характера течения жидкости: оно становится турбулентным, тогда как в случае малых скоростей, рассмотренном выше, следовало говорить о ламинарном течении. Как известно из курса механики сплошных сред, ламинарное течение жидкости, описываемое формулой Пуазейля (2), имеет место при $Re < (Re)_{кр}$, где критическое значение числа Рейнольдса имеет порядок $(Re)_{кр} \sim 10^4$. Для турбулентного течения, когда $Re > (Re)_{кр}$, справедлива формула Ньютона (5). Подводя итог сказанному, еще

раз отметим, что сравнительно простой качественный анализ, основанный на использовании метода размерностей, приводит к хорошему согласию с опытом даже в тех случаях, когда точное аналитическое решение практически неосуществимо.

Список используемых источников:

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

© 2015, Расовский М.Р., Сиделов Д.И.

*Применение метода размерностей к решению
некоторых задач гидродинамики*

© 2015, Rasovsky M.R., Sidelov D.I.

*The application of the method of dimensions to the
solution of some problems of hydrodynamics*