DOI: 10.17117/na.2015.11.04.281

Поступила (Received): 26.11.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.11.04.281.pdf>

Марочкин С.И., Чулюков В.А. Решение задачи термоупругости тонкой пластины

Marochkin S.I., Chuljukov V.A.
Solution of the problem of thermoelasticity of a thin plate

В работе сформулирована математическая модель задачи о деформации тонкой пластины, боковые стенки которой подвергаются тепловому воздействию. Задача решается с использованием метода конечных разностей. Приводится пример решения в виде диаграммы процесса прогиба пластины

Ключевые слова: модель, моделирование, термоупругость

In work is formulated the mathematical model of a task about deformation the plate which lateral walls are exposed to thermal influence. The task is solved using finite difference method. The decision example in the form of the chart of process of a deflection of a plate is given

Key words: model, modeling, thermoelasticity

Марочкин Сергей Иванович

Аспирант

Воронежский государственный педагогический университет

г. Воронеж, ул. Ленина, 86

Marochkin Sergey Ivanovich

Graduate

Voronezh state pedagogical university

Voronezh, Lenina st., 86

Чулюков Владимир Алексеевич

Кандидат физико-математических наук, доцент

Воронежский государственный педагогический университет

г. Воронеж, ул. Ленина, 86

Chuljukov Vladimir Alekseevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Voronezh state pedagogical university

Voronezh, Lenina st., 86

Положим, что внутри области с прямоугольным поперечным сечением расположена тонкая пластина, концы которой в течение всего времени эксперимента остаются неподвижными (рис. 1). Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость $z = 0$ была серединной.

Рис.1. Модель рассматриваемой установки

В [1, 2] получена система уравнений (1)–(8), представляющая математическую модель исследуемого процесса.

В качестве основного уравнения для стационарных прогибов пластины постоянной толщины используется уравнение Софи Жермен:

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta W - \Delta M_T + q, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость, q – нагрузка на единицу площади пластины, а M_T – изгибающий момент, обусловленный температурными воздействиями.

Цилиндрическая жесткость пластины, отражающая упругие и геометрические характеристики пластины, определяется по следующей формуле:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \text{ где } E = 1/\alpha \text{ – модуль Юнга, } \nu \text{ – коэффициент Пуассона.}$$

Для M_T имеем следующее представление:

$$M_T = 2\mu\alpha \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z) z dz, \quad (2)$$

где α – коэффициент линейного расширения, μ – постоянная Ламе. Температурное поле определяется из решения соответствующего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Температурное поле в начальный момент времени равно нулю:

$$T(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

Температурные поля на границах области прямо пропорциональны времени t :

$$T(0, y, z, t) = T(a, y, z, t) = T(x, 0, z, t) = T(x, b, z, t) = t \quad (5)$$

Верхняя и нижняя стенки области теплоизолированы:

$$\frac{\partial T\left(x, y, -\frac{h}{2}, t\right)}{\partial z} = \frac{\partial T\left(x, y, \frac{h}{2}, t\right)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Смещение и скорость смещения пластины в начальный момент времени:

$$W(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial W(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Условия жесткого закрепления на внешней границе Γ пластины:

$$\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial n} \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = W(x, y, t) \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = 0 \quad (8)$$

Рис. 2. Процесс прогиба пластины под воздействием теплового поля

Дифференциальные уравнения решаются методом конечных разностей. Строится система разностных уравнений, аппроксимирующих систему (1)-(8). Шаги $\Delta x = \Delta y = 0,11$; $\Delta z = 0,01$. Во внутренних точках сетки функция T удовлетворяет разностному уравнению:

$$\frac{T_{ijl}^{k+1} - T_{ijl}^k}{\Delta t} = a \left(\frac{T_{i+1jl}^k - 2T_{ijl}^k + T_{i-1jl}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{ijl+1}^k - 2T_{ijl}^k + T_{ijl-1}^k}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{ijl+1}^k - 2T_{ijl}^k + T_{ijl-1}^k}{(\Delta z)^2} \right),$$

где $i, j = 1 \dots n-1$, $l = 1 \dots m-1$.

На границе сеточной области выполняется условие:

$$T_{0jl}^k = T_{njl}^k = T_{i0l}^k = T_{iml}^k = t, \quad \text{где } i, j = 0 \dots n, \quad l = 0 \dots m.$$

Дополнительные условия теплоизоляции стенок имеют вид:

$$\frac{T_{ij0}^k - T_{ij1}^k}{\Delta z} = 0, \quad \frac{T_{ijm}^k - T_{ijm-1}^k}{\Delta z} = 0, \quad \text{где } i, j = 0 \dots n.$$

Начальное значение сеточной функции:

$$T_{ijl}^0 = 0, \quad \text{где } i, j = 0 \dots n, \quad l = 0 \dots m.$$

Разностное уравнение прогибов пластины имеет вид:

$$\rho h \frac{W_{ij}^{k+1} - 2W_{ij}^k + W_{ij}^{k-1}}{(\Delta t)^2} = -D \left[\frac{W_{i+2j}^k - 4W_{i+1j}^k + 6W_{ij}^k - 4W_{i-1j}^k + W_{i-2j}^k}{(\Delta x)^4} + \frac{W_{ij+2}^k - 4W_{ij+1}^k + 6W_{ij}^k - 4W_{ij-1}^k + W_{ij-2}^k}{(\Delta y)^4} + \right. \\ \left. + 2 \frac{W_{i+1j+1}^k - 2W_{i+1j}^k + W_{i+1j-1}^k}{(\Delta x \Delta y)^2} - 4 \frac{W_{ij+1}^k - 2W_{ij}^k + W_{ij-1}^k}{(\Delta x \Delta y)^2} + 2 \frac{W_{i-1j+1}^k - 2W_{i-1j}^k + W_{i-1j-1}^k}{(\Delta x \Delta y)^2} \right] - \\ - \left(\frac{M_{Ti+1j} - 2M_{Tij} + M_{Ti-1j}}{(\Delta x)^2} + \frac{M_{Tij+1} - 2M_{Tij} + M_{Tij-1}}{(\Delta y)^2} \right) + q$$

где $i, j = 2 \dots n-2$, q – нагрузка на единицу площади пластины.

Условия жесткого закрепления на границе аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{W_{0j}^k - W_{1j}^k}{\Delta x} = \frac{W_{nj}^k - W_{n-1j}^k}{\Delta x} = \frac{W_{i0}^k - W_{i1}^k}{\Delta y} = \frac{W_{in-1}^k - W_{in}^k}{\Delta y} = 0, \\ W_{0j}^k = W_{nj}^k = W_{i0}^k = W_{in}^k = 0, \quad \text{где } i, j = 0 \dots n.$$

Начальный прогиб и начальная скорость прогиба аппроксимируются условиями:

$$\frac{W_{ij}^1 - W_{ij}^0}{\Delta t} = 0, \quad W_{ij}^0 = 0, \quad \text{где } i, j = 0 \dots n.$$

Для решения поставленной задачи разработана программа на C#. После установки исходных параметров из пункта меню «Решение» можно выбрать процесс для моделирования: нагревание пластины или процесс деформации. Решение для процесса прогиба пластины под воздействием теплового поля показано на рис. 2.

Список используемых источников:

1. Богданова М.В., Марочкин С.И., Чулюков В.А. Математическое моделирование задачи термоупругости тонкой пластины // Международный научно-исследовательский журнал. 2014. № 1-1 (20). С. 107-108.
2. Богданова М.В., Марочкин С.И., Чулюков В.А. Математическая модель задачи термоупругости тонкой пластины // Научные труды SWorld. 2014. Т. 30. № 1. С. 3-5