DOI: 10.17117/na.2015.11.04.271

<http://ucom.ru/doc/na.2015.11.04.271.pdf>

Поступила (Received): 13.11.2015

Иванычев Д.А., Рязанцева Е.А.

Исследование напряженно-деформируемого состояния анизотропных тел методом граничных состояний

Ivanychev D.A., Ryazantseva E.A.

A study of stress-strain state of anisotropic bodies by method of the boundary conditions

Для решения основных задач механики деформируемого твердого тела применен метод граничных состояний. Разработана идеология формирования базисов внутренних и граничных состояний. Обеспечен изоморфизм пространств состояний. Сформулированы основные задачи в терминах метода граничных состояний. Решена конкретная плоская задача для анизотропного тела

Ключевые слова: метод граничных состояний, анизотропия, плоские задачи

Иванычев Дмитрий Алексеевич

Кандидат физико-математических наук, доцент
Липецкий государственный технический университет
г. Липецк, ул. Московская, 30

Рязанцева Елена Анатольевна

Старший преподаватель
Финансовый университет при правительстве РФ
(липецкий филиал)
г. Липецк, ул. Интернациональная, 12 Б

To solve the basic problems of solid mechanics applied method of boundary conditions. Developed an ideology of formation of bases of internal and boundary conditions. Provided isomorphism between states. The basic problem in terms of the method of boundary conditions. Solved concrete plane problem for an anisotropic body

Key words: method of boundary conditions, anisotropy, plane problems

Ivanychev Dmitriy Alexeyevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
Lipetsk state technical university
Lipetsk, Moscow st., 30

Ryazantseva Elena Anatolievna

Senior Lecturer
Financial university under the government of the RF
(Lipetsk branch)
Lipetsk, International st., 12 B

Для решения основных задач механики деформируемого твердого тела применен метод граничных состояний. Разработана идеология формирования базисов внутренних и граничных состояний. Обеспечен изоморфизм пространств состояний. Сформулированы основные задачи в терминах метода граничных состояний. Решена конкретная плоская задача для анизотропного тела.

В настоящее время в промышленности, в военной, авиакосмической и других отраслях широко используются натуральные и синтетические материалы, которые с точки зрения теории упругости интерпретируются как анизотроп-

ные в отношении упругих свойств. Для того чтобы уметь рассчитывать на прочность детали из таких материалов, необходимо уметь решать задачи теории упругости для анизотропных тел.

Метод граничных состояний [1] (МГС) является новым, эффективным, компьютерно-ориентированным методом решения краевых задач уравнений математической физики. Его основу составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний, которые сопряжены гильбертовым изоморфизмом. Строится базисы этих пространств, проводится их ортогонализация. Затем искомое состояние раскладывается в ряд по элементам ортонормированного базиса и задача состоит в отыскании коэффициентов линейной комбинации, то есть коэффициентов Фурье.

Решена плоская задача для анизотропных тел.

Метод граничных состояний опирается на фундаментальное или общее решение для среды. В случае плоских задач анизотропной упругости общее решение получено Лехницким [2].

Внутреннее состояние $\xi = \{u, v\}, \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}, \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}$ определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для аналитических функций. В случае ограниченного односвязного сечения тела можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(z_1) \\ \Phi_2(z_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z_1^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_2^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz_1^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz_2^k \end{pmatrix} : k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражает внутреннюю энергию упругого деформирования

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_D (\sigma_x^1 \varepsilon_x^2 + \sigma_y^1 \varepsilon_y^2 + 2\sigma_{xy}^1 \varepsilon_{xy}^2) ds.$$

На границе тела напряжения оставляют «след» в виде поверхностных усилий p_x, p_y , которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние $\gamma = \{u, v\}, \{p_x, p_y\}$. В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу внешних сил:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\partial D} (p_x^1 u^2 + p_y^1 v^2) dl.$$

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений оба пространства Ξ, Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. При заданных на границе перемещениях u_0, v_0 либо усилиях p_{x0}, p_{y0} коэффициенты Фурье рассчитываются так:

$$c_j = \int_{\partial D} (p_x^j u_0 + p_y^j v_0) dl; \quad c_j = \int_{\partial D} (p_{x0} u^j + p_{y0} v^j) dl.$$

Первая основная задача для тела круглой формы (рис. 1).

Рис. 1. Нагружение тела круглой формы (слева) и его контур в деформированном состоянии (справа)

Рис. 2. Изолинии:
а – компоненты вектора перемещения u ;
б – компоненты вектора перемещения v ;
в – компоненты напряжения σ_x

Одноосное растяжение при воздействии на сектор. Усилия на границах заданы функцией:

$$P(q) = \begin{cases} P_x = \cos[q] + \cos[\pi/4], P_y = 0, q \in S_1; \\ P_x = \cos[q] - \cos[\pi/4], P_y = 0, q \in S_2; \\ P_x = 0, P_y = 0, q \in S_3; \\ P_x = 0, P_y = 0, q \in S_4. \end{cases}$$

Задавались следующие упругие характеристики (принята безразмерная форма решения): модули Юнга $E_x = 1 \cdot 10^5$, $E_y = 0,42 \cdot 10^5$; модуль сдвига $G = 0,075 \cdot 10^5$; коэффициент Пуассона $\mu = 0,1$; коэффициенты взаимного влияния первого рода $\eta_{xy,x} = 0,07$, $\eta_{xy,y} = 0,04$.

Результаты решения имеют аналитический вид, однако в силу их громоздкости, представлены в графическом виде (рис. 1, 2).

В силу малости деформаций, контур деформированного тела представлен в гипертрофированном виде.

На рис. 2 приведены изолинии различных характеристик напряженно-деформированного состояния.

Список используемых источников:

1. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. №2. С. 115-137.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Иванычев Д.А. Решение плоских задач анизотропной упругости методом граничных состояний // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. Липецк, ЛГТУ. №2 (20). 2010.

© 2015, Иванычев Д.А., Рязанцева Е.А.
Исследование напряженно-деформируемого
состояния анизотропных тел методом граничных
состояний

© 2015, Ivanychev D.A., Ryazantseva E.A.
A study of stress-strain state of anisotropic bodies by
method of the boundary conditions