DOI: 10.17117/na.2015.11.04.267

<http://ucom.ru/doc/na.2015.11.04.267.pdf>

Поступила (Received): 25.11.2015

Есин В.А. О некоторых распределениях на подмногообразиях евклидова пространства

Esin V.A.
About some hyper distributions on the
submanifolds of the Euclidean space

Рассматривается гиперсферическое отображение подмногообразия коразмерности два с помощью орта данной нормали. Это отображение порождает гиперраспределение, инвариантно связанное с полем орта данной нормали. Исследуются свойства гиперраспределения, их связь со свойствами самого подмногообразия находится критерий интегрируемости этого распределения

Ключевые слова: подмногообразие, внешнее дифференцирование, гиперраспределение, аффинная связность

Hyperspherical reflection of codimension 2 using the unit normal sector is considered. This reflection engenders hyperdistribution, invariably connected with the field of unit normal sector. Some properties of hyperdistribution are studied, their connection with the properties with the submanifold itself is shown, the criteria of integration of this hyperdistribution are found

Key words: submanifold, exterior differentiation, hyperdistribution, affine connectedness

Есин Владимир Андреевич

Кандидат физико-математических наук, доцент
Белгородский национального исследовательский
университет
г. Белгород, ул. Победы, 85

Esin Vladimir Andreevich

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Associate Professor
Belgorod national research university
Belgorod, Pobeda st., 85

Рассматриваются распределения на подмногообразии V_p евклидова пространства E_{p+2} , инвариантно связанные с полем орта данной нормали, исследуется их интегрируемость.

Присоединим к подмногообразию $V_p \subset E_{p+2}$ подвижной репер

$$R = (x, e_i, e_\alpha), \quad (i, j, k = 1, \dots, p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2)$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ в точке $x \in V_p$, а векторы e_α образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_j^i e_j + \omega_\alpha^i e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\beta^\alpha e_\beta \quad (1)$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений подмногообразия, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \quad (b_{ji}^\alpha = b_{ji}^\alpha) \quad (2)$$

где b_{ij}^α – второй основной тензор подмногообразия. Функции $\gamma_{ij} = e_i e_j$ – компоненты метрического тензора, γ^{ij} – контравариантные компоненты этого тензора

Пусть на подмногообразии $V_p \subset E_{p+2}$ задано поле нормальных векторов n . Орт e_{p+1} репера направим по n (и в дальнейшем предполагаем, что n коллинеарен e_{p+1}) Тогда форма ω_{p+1}^{p+2} будет главной [1]:

$$\omega_{p+1}^{p+2} = c_i \omega^i, \quad (3)$$

а величины $b_{ij}^{p+1}, b_{ij}^{p+2}$ будут координатами двухвалентных тензоров.

Ковектор c_i задает распределение, которое обозначим Δ_{p-1}^c . Рассмотрим площадку $\Delta_{p-1}^l(x)$, сопряженную вектору c относительно конуса $b_{ij}^{p+1} \omega^i \omega^j = 0$. Пусть $l = l^i e_i \perp \Delta_{p-1}^l(x)$, $\Delta_{p-1}^m(x)$ – площадка, сопряженная вектору l относительно конуса $b_{ij}^{p+2} \omega^i \omega^j = 0$ и $m \perp \Delta_{p-1}^m(x)$, тогда

$$m_i = b_{it}^{p+2} c_j b_{p+1}^{ji} \quad (4)$$

Рассмотрим гиперсферическое изображение $\bar{V}_p$ подмногообразия $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта e_{p+1} данной нормали. Имеем

$$de_{p+1} = \omega_{p+1}^i e_i + \omega_{p+1}^{p+2} e_{p+2} = (-\gamma^{ij} b_{jk}^{p+1} e_i + c_k e_{p+2}) \omega^k = a_k \omega^k$$

В нормальной плоскости $\bar{N}_2(x)$ к гиперсферическому изображению $\bar{V}_p$ инвариантно определены два вектора

$$a_{p+1} = e_{p+1}, \quad a_{p+2} = c_i b_{p+1}^{ij} e_j + e_{p+2}$$

Нормаль $\bar{N}_2(x)$ индуцирует на V_p аффинную связность.[2] Отнесем $\bar{V}_p \subset E_{p+2}$ к реперу $\bar{R} = (x, e_i, a_\alpha)$. В этом репере

$$de_i = \theta_i^j e_j + \theta_i^\alpha a_\alpha = (\theta_i^\alpha + \theta_i^{p+1} c_i b_{p+1}^{ij}) e_j + \theta_i^{p+1} e_{p+1} + \theta_i^{p+2} e_{p+2} \quad (5)$$

С другой стороны в репере R

$$de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^{p+1} e_{p+1} + \omega_i^{p+2} \quad (6)$$

Из (5) и (6) в частности следует, что

$$\theta_i^j = \omega_i^j - b_{it}^{p+2} b_{p+1}^{kj} c_k \omega^t \quad (7)$$

Связность на V_p , индуцируемая нормалью $\bar{N}_2(x)$ будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда $D\theta_i^i = 0$ [2], что в силу (7) приводит к равенству

$$D_{it}^{(p+2)} b_{p+1}^{ki} c_k \omega^t = 0 \quad (8)$$

Но (8) с учетом (4) означает интегрируемость распределения Δ_{p-1}^m . Таким образом справедлива

Теорема 1. Аффинная связность, индуцируемая нормалью $\bar{N}_2(x)$ на $V_p \subset E_{p+2}$ будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда распределение Δ_{p-1}^m вполне интегрируемо.

В дальнейшем подвижной репер $R = (x, e_a, e_p, e_\alpha)$ выбираем таким образом, чтобы $e_a \in \Delta_{p-1}(x)$, а e_p ортогонально $\Delta_{p-1}(x)$, $(a, b = 1, \dots, p-1)$. В этом случае условием

интегрируемости распределения Δ_{p-1} является интегрируемость уравнения $\omega^p = 0$. Поскольку

$$D\omega^p = \omega^a \Lambda \omega_a^b = \omega^a \Lambda \gamma_{ab}^p \omega^b = \gamma_{ab}^p \omega^a \Lambda \omega^b,$$

то это условие равносильно симметричности тензора γ_{ab}^p .

Определим на V_p поле линейного оператора $F(f_j^i)$, полагая

$$Ft = \nabla_t e_p = \nabla_{t^i e_i} e_p = t^i \nabla_{e_i} e_p = t^i \gamma_{pi}^k e_k = f_i^k t^i e_k$$

Рассмотрим ограничение этого оператора на Δ_{p-1} , то есть оператор $f(f_b^a), (f_b^a = \gamma_{pb}^a) f(f_b^a), (f_b^a = \gamma_{pb}^a)$. Дифференцируя тождества $e_a e_p = 0, e_a e_p = 0$, получаем $\gamma_{ac}^p + \gamma_{pc}^b \gamma_{ab} = 0$, то есть $\gamma_{ac}^p = -f_c^b \gamma_{ab}$

Из последних равенств заключаем, что справедлива

Теорема 2. Распределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оператор $f(f_b^a)$ симметричен.

Пусть $\bar{V}_p$ гиперсферическое изображение подмногообразия $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта e_{p+2} данной нормали. Имеем

$$de_{p+2} = \omega_{p+2}^i e_i + \omega_{p+2}^{p+1} e_{p+1} = (-\gamma^{ij} b_{jk}^{p+2} e_i + c_k e_{p+1}) \omega^k = b_k \omega^k$$

где b_k – векторы, касательные к линиям ω^k гиперсферического изображения $\bar{V}_p$. Векторы $b_{p+2} = e_{p+2}$, $b_{p+1} = c_i b_{p+2}^{ij} e_j + e_{p+1}$ образуют ортогональный базис нормальной плоскости гиперсферического изображения $\bar{V}_p$ (здесь $b_{p+2}^{ij} b_{jk}^{p+2} = \delta_k^i$). Таким образом, на подмногообразии возникает векторное поле $\xi_{p+2} = c_i b_{p+2}^{ik} e_k$. Аналогично можно рассмотреть векторное поле $\xi_{p+1} = c_i b_{p+1}^{ik} e_k$.

Пусть $a_\alpha = e_\alpha + \xi_\alpha$. Плоскость, натянутую на векторы a_α , обозначим $\bar{N}_2(x)$ (оснащение $\bar{N}_2(x)$).

Для поверхности $V_2 \subset E_4$, отнесенной к сопряженной сети ($b_{12}^3 = b_{12}^4 = 0$) имеем

$$\xi_3 = c_1 b_3^{11} e_1 + c_2 b_3^{22} e_2 = \frac{c_1}{b_{11}^3} e_1 + \frac{c_2}{b_{22}^3} e_2, \quad \xi_4 = c_1 b_4^{11} e_1 + c_2 b_4^{22} e_2 = \frac{c_1}{b_{11}^4} e_1 + \frac{c_2}{b_{22}^4} e_2$$

Векторные поля ξ_3 и ξ_4 задают на V_2 сеть (ξ_3, ξ_4) . Тогда сложное отношение

$$W = (\xi_3, \xi_4, e_1, e_2) = \frac{b_{11}^3 b_{22}^4}{b_{22}^3 b_{11}^4}$$

Ясно, что $W = -1$ тогда и только тогда, когда

$$b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{22}^3 b_{11}^4 = 0 \quad (9)$$

Но (9) означает, что e_3 и e_4 являются главными направлениями присоединенной кривой поверхности $V_2 \subset E_4$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. Сеть (ξ_3, ξ_4) будет гармонической для сопряженной сети поверхности $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда, когда векторы e_3, e_4 имеют главные направления относительно присоединенной кривой.

Список используемых источников:

1. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М., Высшая школа, 1989. 222 с.
2. Есин В.А. К геометрии распределений. Кишинев. 1988. С. 112-113.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. Т. 2. М.: Наука, 1981.

© 2015, Есин В.А.

*О некоторых распределениях на подмногообразиях
евклидова пространства*

© 2015, Esin V.A.

*About some hyper distributions on the submanifolds
of the Euclidean space*