DOI: 10.17117/na.2015.11.04.249

<http://ucom.ru/doc/na.2015.11.04.249.pdf>

Поступила (Received): 25.11.2015

Борисовский И.П. О некоторых свойствах пространств расслоения Бутби-Вана

Borisovskiy I.P.
About some properties of Boothby-Wang bundle space

В работе исследуется связь между геометриями обобщенных многообразий Ходжа и пространств главных T^1 -расслоений над ними, характеристический класс которых порожден фундаментальной формой почти келеровой структуры. Получены условия, при которых почти контактная метрическая структура пространства расслоения удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -подмногообразий

Ключевые слова: многообразия Ходжа, T^1 -расслоения, почти келерова структура, подмногообразия, фундаментальная форма

Борисовский Иван Петрович

Кандидат физико-математических наук, доцент
Белгородский национальный исследовательский университет
г. Белгород, ул. Победы, 85

I this work the connection between geometries of generalized Hodge manifolds and spaces of top t -bundles above them, which characteristic class is engendered by fundamental form of almost Kahler structure. The conditions are obtained in which almost contact metric structure of the total space satisfies the axiom F – holomorphic $2r+1$ -submanifold

Key words: hodge manifolds, top t -bundles, almost Kahler structure, submanifold, fundamental form

Borisovskiy Ivan Petrovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor
Belgorod, Pobeda st., 85

Говорят, что почти контактное метрическое многообразие P^{2n+1} удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -подмногообразий ($1 \leq r < n$), если $\forall p \in P, \forall L \subset T_p(P), \dim L = 2r+1, \Phi(L) \subset L, \exists N \subset P$ – Φ – инвариантное подмногообразие, такое что $p \in N, T_p(N) = L$. В случае, если подмногообразие всегда можно выбрать вполне геодезическим, то говорят, что многообразие P удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -плоскостей.

Пусть пространство расслоения Бутби-Вана над обобщенным многообразием Ходжа удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -подмногообразий. Поскольку $\forall p \in P, L \subset T_p(P)$ – нечетномерное Φ – инвариантное подпространство, а $N \subset P$ – Φ – инвариантное подмногообразие, то в силу его Φ – инвариантности собственные подмодули сужения Φ на $X(N)$ содержатся в собственных подмодулях оператора Φ . В дальнейшем будем считать, что греческие индексы пробе-

гают значения от 1 до r . Выберем в $T_p(N)$ A -репер $(p, \xi, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r, \nu^1, \nu^2, \dots, \nu^r)$. Обозначим $j: T_p(N) \rightarrow T_p(P)$ - естественное вложение. В произвольном A -репере $(p, \xi, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)$ оно задается соотношениями

$$j(\nu_\alpha) = C_\alpha^a \varepsilon_a;$$

$$j(\nu^\alpha) = C_\alpha^a \varepsilon^a;$$

$$j(\xi) = \xi.$$

Обозначим $(\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r)$ - кобазис дуальный базису $(\xi, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r, \nu^1, \nu^2, \dots, \nu^r)$. Тогда

$$\omega^a = C_\alpha^a \theta^\alpha;$$

$$\omega_a = C_\alpha^a \theta_\alpha; \quad (1)$$

$$\omega = \theta.$$

Продифференцируем (1.1) внешним образом:

$$d\omega^a = dC_\alpha^a \wedge \theta^\alpha + C_\alpha^a d\theta^\alpha.$$

С учетом (1) и первой группы структурных уравнений почти контактной метрической структуры, индуцированной на пространстве расслоения Бутби-Вана, имеем

$$C_\alpha^a d\theta^\alpha = (-dC_\alpha^a + C_\alpha^b \omega_b^a - \sqrt{-1} C_\alpha^a \theta) \wedge \theta^\alpha + B^{abc} C_b^\beta C_c^\gamma \theta_\beta \wedge \theta_\gamma. \quad (2)$$

Заметим, что

$$C_\alpha^a C_a^\gamma = \langle C_\alpha^a \varepsilon_a, C_b^\gamma \varepsilon^b \rangle = \langle j(\nu_\alpha), j(\nu^\gamma) \rangle = \delta_\alpha^\gamma.$$

Свернув (2) с C_a^γ получим

$$d\theta^\gamma = (-C_a^\gamma dC_\alpha^a + C_a^\gamma C_\alpha^b \omega_b^a - \sqrt{-1} \delta_\alpha^\gamma \theta) \wedge \theta^\alpha + B^{abc} C_a^\gamma C_b^\beta C_c^\eta \theta_\beta \wedge \theta_\gamma.$$

Обозначив

$$\theta_\alpha^\gamma = -C_a^\gamma dC_\alpha^a + C_a^\gamma C_\alpha^b \omega_b^a, \quad (3)$$

получим

$$d\theta^\gamma = \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta^\alpha - \sqrt{-1} \delta_\alpha^\gamma \theta \wedge \theta^\alpha + B^{abc} C_a^\gamma C_b^\beta C_c^\eta \theta_\beta \wedge \theta_\gamma. \quad (4)$$

Аналогично, дифференцируя (1.2) получим

$$d\theta_\gamma = (-C_\gamma^a dC_\alpha^a - C_\gamma^a C_\alpha^b \omega_b^a + \sqrt{-1} \delta_\gamma^\alpha \theta) \wedge \theta_\alpha + B_{abc} C_\gamma^a C_b^\beta C_c^\eta \theta_\beta \wedge \theta_\eta. \quad (5)$$

Заметим, что дифференцирование внешним образом соотношения $C_\alpha^a C_a^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$

дает:

$$C_\alpha^a dC_a^\gamma = -C_a^\gamma dC_\alpha^a.$$

С учетом этого имеем

$$d\theta_\gamma = -\theta_\gamma^a \wedge \theta_a + \sqrt{-1} \delta_\gamma^\alpha \theta \wedge \theta_\alpha + C_\gamma^a C_b^\beta C_\eta^c B_{abc} \theta_\beta \wedge \theta_\eta. \quad (6)$$

Далее, в соответствии с (4) соотношение (2) можно переписать в виде

$$(dC_\gamma^a - C_\gamma^b \omega_b^a + \sqrt{-1} C_\alpha^a \theta^\alpha) \wedge \theta^\gamma + (B^{abc} C_\alpha^a C_d^\gamma C_b^\beta C_c^\eta - B^{abc} C_b^\beta C_c^\gamma) \theta_\beta \wedge \theta_\eta = 0.$$

Откуда с учетом линейной независимости форм $\{\theta^\alpha, \theta_\beta\}$ и леммы Картана существует набор функций $\{C_{\alpha\beta}^a\}$ таких, что

$$\begin{aligned} 1. B^{abc} C_b^\beta C_c^\gamma &= C_\alpha^a C_d^\gamma C_b^\beta C_c^\eta B^{dbc}; \\ 2. dC_\gamma^a - C_\gamma^b \omega_b^a + \sqrt{-1} C_\alpha^a \theta_\gamma^\alpha &= C_{\alpha\beta}^a \theta^\beta; C_{[\alpha\beta]}^a = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношение (7.1) перепишем в виде

$$\left(\frac{1}{r} B^{abc} \delta_g^d - B^{dbc} \delta_g^a\right) = C_b^\beta C_c^\eta C_d^\alpha C_\alpha^g = 0.$$

В силу того, что это соответствие должно выполняться тождественно относительно $\{C_\alpha^a\}$, в предположении $r \geq 2$ получаем $\frac{1}{r} B^{abc} \delta_g^d = B^{dbc} \delta_g^a$.

Откуда немедленно следует, что $B^{abc} = 0$, то есть база расслоения – многообразие Ходжа. Если же $r = 1$, то соотношение (7.1) выполняется автоматически (обе его части равны нулю). Итак, доказана

Теорема 1. Если пространство расслоения Бутби-Вана удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -подмногообразий ($r \geq 2$), то база расслоения является многообразием Ходжа.

Пусть теперь многообразие P удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -плоскостей. Тогда (7.2) примет вид

$$dC_\gamma^a - C_\gamma^b \omega_b^a + \sqrt{-1} C_\alpha^a \theta_\gamma^\alpha = 0.$$

Дифференцируя это соотношение внешним образом с учетом (1) и второй группы структурных уравнений получим

$$\begin{aligned} C_\beta^a d\theta_\alpha^\beta &= C_\gamma^a \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\alpha^\beta + C_\alpha^b C_\beta^c C_d^\gamma (2B^{adh} B_{hbc} + A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d) \theta^\beta \wedge \theta_\gamma + \\ &C_\alpha^b C_\beta^c C_\gamma^d B_{bcd}^a \theta^\beta \wedge \theta_\gamma - C_\alpha^b C_\beta^c C_d^\gamma B^{acd} \theta_\beta \wedge \theta_\gamma. \end{aligned}$$

Будем дальше предполагать $r \geq 2$. Согласно доказанной теореме тогда $B^{abc} = 0$, и значит $B_{bca}^d = B^{acd} = 0$. Таким образом последнее соотношение примет вид

$$C_\beta^a \theta_\alpha^\beta = C_\gamma^a \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\alpha^\beta + C_\alpha^b C_\beta^c C_d^\gamma (A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d) \theta^\beta \wedge \theta_\gamma. \quad (8)$$

Дифференцируя теперь (4) получим $\Delta \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma = 0$, где $\Delta \theta_\alpha^\gamma = d\theta_\alpha^\gamma - \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\alpha^\beta + 2\theta^\gamma \wedge \theta_\alpha$.

Аналогично, дифференцирование (5) дает $\Delta \theta_\gamma^\alpha \wedge \theta^\gamma = 0$.

Используя обобщенную лемму Картана находим, что $\Delta \theta_\alpha^\gamma = \lambda_{\alpha\beta}^{\gamma\eta} \theta^\beta \wedge \theta_\eta$, причем $\lambda_{\{\alpha\beta\}}^\eta = \lambda_{\alpha\beta}^{[\gamma\eta]} = 0$. Подставляя в (8) получаем

$$C_\alpha^b C_\beta^c C_d^\gamma (A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d) = -2\delta_\alpha^\gamma C_\beta^a + C_\varphi^a \lambda_{\alpha\beta}^{\varphi\gamma}.$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$(A_{bc}^{ad} \delta_\alpha^\varphi \delta_\beta^\psi + 2\delta_b^a \delta_c^d \delta_\alpha^\varphi \delta_\beta^\psi + 2\delta_c^a \delta_b^d \delta_\alpha^\varphi \delta_\beta^\psi - \lambda_{\alpha\beta}^{\varphi\psi} \delta_b^a \delta_c^d) C_\varphi^b C_\psi^c C_d^\gamma = 0.$$

Поскольку оно должно выполняться тождественно относительно $\{C_\alpha^a\}$, имеем отсюда

$$A_{bc}^{ad} \delta_{\alpha\beta}^{\varphi\psi} + 2\delta_{bc}^{ad} \delta_{\alpha\beta}^{\varphi\psi} - \lambda_{\alpha\beta}^{\varphi\psi} \delta_{bc}^{ad} = 0.$$

Свертывая по индексам (α, φ) и (β, ψ) получим $A_{bc}^{ad} = A \delta_{bc}^{ad}$, где

$A = \frac{1}{r(r+1)} \lambda_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - 2$. Но это означает, что база расслоения является комплексной

пространственной формой, а пространство расслоения сасакиевой пространственной формой. С другой стороны, всякая сасакиева пространственная форма размерности выше трех удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -плоскостей [1]. Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пространство расслоения Бутби-Вана удовлетворяет аксиоме Φ – голоморфных $2r+1$ -плоскостей ($r \geq 2$) тогда и только тогда, когда база расслоения – комплексная пространственная форма.

Список используемых источников:

1. Кириченко В.Ф. Аксиома Φ – голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии. // Изв. АН СССР. 1984. 48. №4. С. 711-734.

© 2015, Борисовский И.П.

О некоторых свойствах пространств расслоения
Бутби-Вана

© 2015, Borisovskiy I.P.

About some properties of Boothby-Wang bundle
space