DOI: 10.17117/na.2015.10.03.462

<http://ucom.ru/doc/na.2015.10.03.462.pdf>

Поступила (Received): 22.10.2015

Сиделов Д.И. Использование метода векторных диаграмм при решении олимпиадных физических задач

Sidelov D.I. Using the method of vector diagrams when solving Olympiad physics problems

Метод векторных диаграмм позволяет производить суммирование колебаний, происходящих вдоль одной оси с одинаковой частотой, но разными амплитудами и начальными фазами. Олимпиадные физические задачи теории колебаний требуют использования этого метода для их успешного решения

Ключевые слова: метод векторных диаграмм, физическая задача

The vector diagram allows the summation of the vibrations occurring along a single axis with the same frequency, but different amplitudes and initial phases. Olympiad physics problems of the theory of oscillations require the use of this method for their successful solution

Key words: method of vector diagrams, physical problem

Сиделов Дмитрий Ильич

Кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический
университет
г. Оренбург, ул. Советская, 19

Sidelov Dmitry Ilyich

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Associate Professor
Orenburg state pedagogical university
Orenburg, Soviet st., 19

При решении олимпиадных физических задач о колебаниях иногда возникает необходимость суммирования двух колебаний с одинаковой частотой $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, но различными амплитудами $A_1 \neq A_2$ и начальными фазами $\varphi_{01} \neq \varphi_{02}$. Известно, что алгебраическое сложение в таких случаях затруднительно. Однако между колебательным и вращательным движениями существует глубокая взаимосвязь, проявляющаяся, в частности, в аналитическом задании вращения точки вокруг центра прямоугольной декартовой системы координат по окружности радиуса A с угловой скоростью ω в виде системы двух колебательных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = A \cdot \sin(\omega t) \end{cases}.$$

Кроме того, если смотреть на обращающееся вокруг некоторой оси тело сбоку (перпендикулярно оси вращения), то такое тело будет совершать колебания согласно уравнению: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Все эти доводы обосновывают применимость в таких случаях метода векторных диаграмм для получения суммарных колебательных уравнений.

Рассмотрим процесс сложения двух колебаний одинаковой частоты и происходящих с разными начальными фазами и амплитудами по методу векторных диаграмм.

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01}) \\ x_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

Вектора амплитуд вращаются вокруг центра O с одинаковыми угловыми скоростями, поэтому их взаимное расположение не изменяется в процессе всего движения, что в теории колебаний будет соответствовать постоянству разности фаз колебаний $\Delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02} = \text{const}$.

Рис. 1. Метод векторных диаграмм

Тогда результирующая амплитуда колебаний, выраженная векторной суммой $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, также не изменяется с течением времени. Возведем уравнение для амплитуды в квадрат и найдем ее:

$$A^2 = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1\vec{A}_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos \Delta\varphi.$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos \Delta\varphi}.$$

Таким образом, амплитуда результирующих колебаний A зависит не только от амплитуд каждого колебания, но и от сдвига фаз $\Delta\varphi$, которому на векторной диаграмме соответствует угол между векторами амплитуд $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$.

Используя простейшие геометрические преобразования, получим начальную фазу результирующих колебаний φ_0 :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_{01} + A_2 \cdot \sin \varphi_{02}}{A_1 \cdot \cos \varphi_{01} + A_2 \cdot \cos \varphi_{02}}.$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{A_1 \cdot \sin \varphi_{01} + A_2 \cdot \sin \varphi_{02}}{A_1 \cdot \cos \varphi_{01} + A_2 \cdot \cos \varphi_{02}} \right).$$

Рассмотрим применение метода векторных диаграмм для решения некоторой частной задачи теории колебаний.

Задача. Резистор $R = 10$ Ом и катушка индуктивности $L = 0.2$ Гн включены последовательно в цепь источника стандартной частоты $\nu = 50$ Гц. Какой емкости C конденсатор необходимо включить в последовательную цепь, чтобы уменьшить сдвиг фаз между током и напряжением на 30° .

Решение.

Рассмотрим начальное включение цепи и разность фаз между колебаниями тока и напряжения в цепи содержащей резистор и катушку. Известно, что в активных элементах цепи (резисторах) ток и напряжение колеблются синфазно, а в реактивных элементах: конденсаторах ток опережает по фазе напряжение на $\pi/2$, в катушках, наоборот, напряжение опережает ток по фазе на $\pi/2$. Поскольку соединение элементов цепи последовательное, то значение тока во всех частях такой квазистационарной цепи будет одинаковым. Поэтому в качестве оси OX в методе векторных диаграмм будем выбирать направление колебаний тока $\vec{I}_0$, а значение амплитуды результирующего напряжения (на выходах источника) можно найти как векторную сумму напряжений на элементах цепи:

$$\vec{U}_{01} = \vec{U}_{0R} + \vec{U}_{0L}.$$

Рис. 2. Векторная диаграмма напряжений

Применение метода векторных диаграмм позволяет нам рассчитать разность фаз в этом случае:

$$\Delta\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctg\left(\frac{2\pi\nu L}{R}\right) = \arctg\left(\frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0.2}{10}\right) = 81^\circ$$

При добавлении конденсатора емкости C изменяется распределение напряжений, а сдвиг фаз между током и напряжением уменьшается на 30° и становится равным 51° :

$$\vec{U}_{02} = \vec{U}_{0R} + \vec{U}_{0L} + \vec{U}_{0C}$$

$$\Delta\varphi' = \arctg\left(\frac{\omega L - (\omega C)^{-1}}{R}\right) = 51^\circ.$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R \cdot \tg\Delta\varphi' \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot (\omega L - R \cdot \tg\Delta\varphi')} = \frac{1}{314 \cdot (314 \cdot 0.2 - 10 \cdot \tg 51^\circ)} = 63 \text{ (мкФ)}.$$

Заметим, что полученное нами решение вполне по силам ученикам выпускных классов средних школ и может использоваться как метод обучения

решению олимпиадных задач, так или иначе связанных с суммированием колебаний одинаковой частоты, но с различающимися начальными фазами и амплитудами.

Междисциплинарные связи (МДС) физики и геометрии очень трудно переоценить особенно в разделах физики, связанных с описанием движения как такового (векторный анализ, координатный метод), принципом суперпозиции движения, а также суперпозиции сил, физических полей и теории колебаний.

Метод векторных диаграмм необходимо использовать в процессе решения задач теории колебаний с выпускниками старших классов физико-математического профиля, поскольку данный метод подчеркивает единство вращательного и колебательного движений и способствует интеграции и более глубокому усвоению знаний, получаемых на уроках физики и геометрии.

Таким образом, мы убедились в эффективности и простоте использования метода векторных диаграмм при решении олимпиадных физических задач теории колебаний.

© 2015, Сиделов Д.И.

*Использование метода векторных диаграмм при
решении олимпиадных физических задач*

© 2015, Sidelov D.I.

*Using the method of vector diagrams when solving
Olympiad physics problems*