DOI: 10.17117/na.2015.09.922

Поступила (Received): 14.09.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.09.922.pdf>**Чыонг Ван Хуан****Определение критических скоростей
при обтекании прямого крыла****Truong Van Huan****Determination of critical flow velocities on the straight wing**

В статье рассматривается обтекание прямого крыла установившимся потоком газа. Крыло рассматривается как стержень с деформацией поперечного сечения в рамках теории В.З. Власова. Обтекание крыла определяется линейной моделью аэродинамики. Показано, что изгибные деформации крыла описываются неоднородным дифференциальным уравнением, а деформации кручения – линейным однородным уравнением. Для ромбовидного профиля различной относительной толщины определены критические скорости обтекания как наименьшие значения числа Маха, отвечающие этому условию

Ключевые слова: критические скорости, стержень, аэродинамика

Чыонг Ван Хуан

Специалист, Аспирант

Тульский государственный университет

г. Тула, пр. Ленина, 92

In article, the flow envelop around wing is airflow. The wing is considered to be a rod with deplanation of cross-section within V. Z. Vlasov's theory. The calculation of the airflow is based on linear model of aerodynamics. It is shown that flexural deformations of a wing are described by the non-uniform differential equation, the linear uniform equation. The critical speeds for diamond-shaped profiles with different thickness are equal to the minimum value of the Mach number which is corresponding to the foresaid condition

Key words: critical flow velocities, rod, aerodynamics

Truong Van Huan

Specialist, Graduate

Tula state university

Tula, Lenin ave., 92

Прямые крылья большого удлинения в настоящее время широко используются в конструкциях беспилотных летательных аппаратов (БЛА). Области их применения охватывают мониторинг лесных массивов в пожароопасные периоды, картографию и аналогичные цели. Для таких ЛА характерны дозвуковые скорости; в то же время возможно их размещение на борту сверхзвуковых носителей и сверхзвуковые режимы полета. Таким образом, исследование поведения крыла в широком диапазоне скоростей стационарного полета представляет существенный интерес для практики проектирования БЛА.

Для моделирования крыльев большого удлинения наиболее подходящей является стержневая модель [1, 2, 3]. Так как профиль крыла является тонким (отношение максимальной толщины к хорде, иначе относительная толщина

$\bar{c} = \frac{h}{b} < 0.1$), то следует применять теорию стержней, учитывающую деформации

цию поперечного сечения В.З. Власова. Уравнения состояния крыла при профиле, имеющем две оси симметрии [3], имеют вид:

$$E \cdot J_x \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} v(z, t) + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(z, t) - \rho \cdot J_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(z, t) = q_{y1} \quad (1)$$

$$E \cdot J_\omega \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} \theta(z, t) - G \cdot J_d \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta(z, t) - \rho \cdot J_\omega \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(z, t) + r \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(z, t) = m_1 \quad (2)$$

$$J_d = \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$$

$$q_{y1} = q_y(z) + \frac{\partial}{\partial z} r_y(z) - \frac{E \cdot J_x}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} q_y(z)$$

$$m_1 = m - \frac{E \cdot J_\varphi}{G \cdot (J_x + J_y)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} m(z) + \left(\frac{J_y - J_x}{J_y + J_x} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} r_\varphi(z) \right)$$

Здесь z – осевая координата, x – координата, определяемая пересечением плоскости профиля и плоскости крыла, y – ось, перпендикулярная плоскости крыла. Входящие в (1), (2), (3) геометрические характеристики крыла имеют смысл осевых (J_x, J_y) и секториального [3] (J_ω) моментов инерции профиля. Оси x и y – оси симметрии профиля.

Нагрузки на крыло определим по модели линейной аэродинамики [5]:

$$m = M_{z\alpha} \cdot (\alpha + \theta) \cdot \frac{S_{kp} \cdot b}{L} \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2} ; \quad q_y = C_{y\alpha} \cdot (\alpha + \theta) \cdot \frac{S_{kp}}{L} \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2} ,$$

где m – крутящий момент, распределенный по длине крыла, q_y – подъемная сила, распределенная по длине крыла, $S_{kp} = bL$ – площадь консоли крыла, b, L – бортовая хорда и длина консоли, ρ_a – плотность воздуха на высоте полета, V_a – скорость полета, α – угол атаки профиля, θ – угол закручивания профиля за счет деформации кручения. Величины $M_{z\alpha}$ и $C_{y\alpha}$ имеют смысл производных аэродинамических коэффициентов по углу атаки и зависят от удлинения, сужения, относительной толщины крыла и числа Маха. Графики этих величин приведены в [5]. Если пренебречь эффектами перетекания воздуха через концевую хорду и влиянием фюзеляжа вблизи бортовой хорды, то аэродинамические силу и момент можно считать равномерно распределенными по длине крыла.

Из формул (2) и (3) следует, что правая часть уравнения кручения содержит в себе искомую функцию – угол закручивания крыла θ ; уравнения изгиба также имеют θ в правой части. Но влияние угла закручивания при этом совершенно различное: если уравнения изгиба будут неоднородными, то уравнение кручения при $\alpha=0$ представляет задачу Штурма-Лиувилля, то есть задачу на собственные значения. Другими словами, в этом варианте геометрии крыла причинами изгибных колебаний являются и набегающий поток (при параметре $\alpha \neq 0$), и крутильные колебания, тогда как крутильные колебания могут возникать и при $\alpha=0$ – собственные крутильные колебания.

Если поставить вопрос об устойчивости недеформированного состояния крыла, то его решение сводится к анализу спектра однородного уравнения, со-

путствующему уравнению кручения (2). Так как собственные функции этого уравнения удовлетворяют условиям теоремы Стеклова, то решение неоднородной задачи (2) может быть представлено рядом по этим функциям; если все собственные числа однородного уравнения вещественные, то крутильные движения – гармонические и недеформированное состояние устойчиво по Ляпунову [4]. Если же в спектре имеется хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней, то крутильные движения – аperiodические и начальное состояние неустойчиво. В [6] показано, что при определенных значениях числа M набегающего потока такая ситуация возможна.

Для анализа устойчивости приведем уравнение кручения (2) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \theta(\xi, \tau) - j_{d\varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \theta(\xi, \tau) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \theta(\xi, \tau) + j_{xy\varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \theta(\xi, \tau) = M_{z\alpha}(M) \cdot (\alpha + \theta(\xi, \tau)) \cdot K_t(H) \cdot M^2, \quad (1)$$

где

$$j_{d\varphi} = \frac{J_d \cdot L^2}{2 \cdot J_\varphi \cdot (\nu + 1)}; \quad j_{xy\varphi} = L^2 \cdot \frac{(J_x + J_y)}{J_\varphi}; \quad K_t = \frac{S_{kp} \cdot b \cdot L^3}{2 \cdot J_\varphi} \cdot \frac{\rho_a}{\rho} \left(\frac{V_a(H)}{V_{kp}} \right)^2; \quad V_{kp} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь ρ_a , V_a – плотность воздуха и скорость звука на высоте полета, E , ρ – модуль Юнга и плотность материала крыла. Зависимость $M_{z\alpha}(M)$ и параметров крыла, приведенная в [5], представлялась в аналитической форме по методу наименьших квадратов в диапазоне $0 < M < 4$.

Расчеты проводились для крыла длиной 1 м, бортовой хордой 0.1 м, и относительными толщинами $\bar{c} = 0.01; 0.025; 0.05$. Материал крыла – сталь с $E=200$ ГПа, $\rho=7850$ кг/м³, $\nu=0.3$. Рассматривался ромбовидный профиль (рис. 1).

Рис. 1. Ромбовидный профиль

Зависимости четырех первых собственных частот от числа Маха набегающего потока приведены на рис. 2... рис. 4.

Рис. 2. Зависимость собственных частот от числа M . Относительная толщина 0.01

Рис. 3. Зависимость собственных частот от числа M . Относительная толщина 0.025

Рис. 4. Зависимость собственных частот от числа M . Относительная толщина 0.05

Упомянутые рисунки демонстрируют очевидное свойство крыла – увеличение критической скорости с увеличением поперечной изгибной жесткости. Далее, критическая скорость определяется как равенство нулю первой собственной частоты, которая определялась как наименьший *вещественный корень* характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5) при $\alpha=0$, что мы трактуем как прекращение свободных гармонических крутильных колебаний по первой форме. После увеличения числа M свыше этого значения свободные колебания осуществляются по *второй* форме, вокруг *первой* формы, которая развивается аperiodически и является *неустойчивой*. Тем самым точка $\Omega_1=0$ является точкой бифуркации решения (5), а соответствующее ей число M – может быть названо критическим [1, 2]. На графиках рис. 2...рис. 4 точки бифуркации легко обнаружить по смене вида маркера – ромб сменяется кружком (на рис.2 это соответствует $M \approx 0.3$, на рис. 3 – $M \approx 0.75$, на рис. 4 – $M \approx 14$). На рисунках 2...4 не показаны диапазоны, в которых смены форм колебаний не происходит. Характерным в этом смысле является рис. 3, в котором имеются резкие изменения собственных частот в окрестности $M=1$. Отметим, что смены формы колебаний при этих изменениях *не происходит*; кривая $\Omega_2(M)$ *не заменяет* кривую $\Omega_1(M)$ и поэтому точка $M=1$ *не является* точкой бифуркации. Аналогичные явления происходят и при большой относительной толщине, но на рис. 4 они не показаны. Объяснение нерегулярности графиков при $M \approx 1$ можно найти в явлении перемещения центра давления x_d при переходе через трансзвук ($M=1$) от дозвукового положения $x_d \approx 0.25b$ до сверхзвукового $x_d \approx 0.5b$ [5].

Уточнение критического значения числа M можно получить следующим образом. Численные эксперименты показали, что удовлетворительная аппроксимация зависимостей $\Omega(M)$ возможна только кубическим сплайном. Вблизи конца кривой он определяется четырьмя последними точками. Если построить кубическую сплайн-интерполяцию по упомянутым четырем точкам вида:

$$\begin{aligned} \Omega(M) &= \Omega_{N-3}P_1(M) + \Omega_{N-2}P_2(M) + \Omega_{N-1}P_3(M) + \Omega_N P_4(M), \\ P_1(\xi) &= \frac{(1-\xi)(3\xi-1)(3\xi-2)}{2}; \quad P_2(\xi) = \frac{9\xi}{2}(3\xi-2)(\xi-1); \\ P_3(\xi) &= \frac{9\xi}{2}(3\xi-1)(1-\xi); \quad P_4(\xi) = \frac{\xi}{2}(3\xi-1)(3\xi-2); \\ \xi &= \frac{M - M_{N-3}}{M_N - M_{N-3}} \end{aligned} \quad (3)$$

где N – номер последней точки в аппроксимируемом массиве $[M, \Omega]$, то оценка критического числа M определяется как вещественный корень уравнения (7).

Оценки критических скоростей по графикам рис. 2...рис. 4 следующие:

$$M_{кр}^{Puc.3} = 0.2941; \quad M_{кр}^{Puc.4} = 0.7577; \quad M_{кр}^{Puc.5} = 13.96;$$

Таким образом, предлагаемая методика определения критических скоростей прямого крыла симметричного профиля, реализованная на программном

комплексе MathCad 14, позволяет достаточно просто получить оценки критических скоростей обтекания для различных параметров геометрии профиля. Требуемые исходные данные – зависимости аэродинамических производных от числа М набегающего потока – могут быть получены либо из литературных данных, либо аппроксимацией результатов продувок профиля в аэродинамических трубах.

Список используемых источников:

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 341 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 565 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
6. Чыонг Ван Хуан, Желтков В.И. Определение критических скоростей прямого крыла большого удлинения // Известия ТулГУ. 2014. Вып. 3. С. 71-80.

© 2015, Чыонг Ван Хуан

Определение критических скоростей при
обтекании прямого крыла

© 2015, Truong Van Huan

Determination of critical flow velocities on the
straight wing