DOI: 10.17117/na.2015.09.918

<http://ucom.ru/doc/na.2015.09.918.pdf>

Поступила (Received): 24.09.2015

Расовский М.Р., Сиделов Д.И. Нахождение экстремума функции в олимпиадных физических задачах

Rasovsky M.R., Sidelov D.I.
Finding the extremum of the function in the
physical tasks of the olympiad

В задачах физических олимпиад и задачах, предлагаемых на ЕГЭ, порой требуется определить экстремальное значение той или иной величины.

Наиболее часто применяемым методом нахождения экстремального значения той или иной функции является метод, основанный на известной теореме Ферма

Ключевые слова: экстремум, физическая задача

In problems of physical contests and challenges offered on the exam, sometimes required to determine the extreme value of a particular magnitude. The most commonly used method of finding extreme values of a function is a method based on the famous Fermat's theorem

Key words: extremum, physical problem

Расовский Михаил Рафаилович

*Кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический университет*

г. Оренбург, ул. Советская, 19

Rasovsky Mikhail Rafailovich

*Candidate of physico-mathematical Sciences,
Associate Professor*

*Orenburg state pedagogical university
Orenburg, Sovetskaya st., 19*

Сиделов Дмитрий Ильич

*Кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический университет*

г. Оренбург, ул. Советская, 19

Sidelov Dmitry Ilyich

*Candidate of physico-mathematical Sciences,
Associate Professor*

*Orenburg state pedagogical university
Orenburg, Sovetskaya st., 19*

В задачах физических олимпиад, а также в некоторых задачах повышенного уровня, предлагаемых на ЕГЭ, порой требуется определить экстремальное значение той или иной величины. Представляется целесообразным проанализировать основные методы решения таких задач.

Наиболее часто применяемым (и, в сущности, универсальным) методом нахождения экстремального значения той или иной функции является метод, основанный на известной теореме Ферма. Согласно этой теореме, необходимым условием существования экстремума функции является равенство нулю ее первой производной в соответствующей точке. Для иллюстрации того, как применяется этот метод, рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. В цилиндрический тонкостенный стакан наливают воду. При каком уровне воды x центр тяжести стакана с водой занимает самое низкое

положение? Масса стакана m , площадь сечения S , центр тяжести пустого стакана находится на высоте H от основания, плотность воды ρ .

Решение.

Рис. 1. Стакан с водой

Обозначения:

O_1 – центр тяжести стакана массы m ;

O_2 – центр тяжести воды массой $M = \rho Sx$;

O – центр тяжести стакана с водой.

Условие равновесия стакана с водой:

$$M \cdot \left(\frac{x}{2} - y \right) = m \cdot (y - H), \text{ или } \rho Sx \cdot \left(\frac{x}{2} - y \right) = m \cdot (y - H).$$

Выразим отсюда высоту центра масс стакана с водой:

$$y(x) = \frac{\rho Sx^2 + 2mH}{2 \cdot (\rho Sx + m)}.$$

Считая x независимой переменной, найдем экстремум функции $y(x)$ с помощью теоремы Ферма, для чего приравняем нулю первую производную:

$$y'(x) = \frac{2\rho Sx \cdot (2\rho Sx + 2m) - (\rho Sx^2 + 2mH) \cdot 2\rho S}{4 \cdot (\rho Sx + m)^2} = 0,$$

$$\text{откуда } x = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 2\rho SmH}}{\rho S}.$$

Отрицательный корень по понятным причинам отбрасываем. Нетрудно убедиться, что при найденном значении x функция $y(x)$ минимальна, как и требует условие задачи.

В некоторых задачах может оказаться не один, а более экстремумов, каждый из которых может быть найден с помощью вышеописанного метода. Рассмотрим подобную задачу.

Задача 2. Тонкое проволочное кольцо радиуса R имеет заряд q . Найти напряженность электрического поля кольца на расстоянии x от его центра (рис. 2) построить график зависимости $E(x)$.

Решение.

Рис. 2. Электрическое поле заряженного кольца

Для отыскания поля $E(x)$ в точке x , рассмотрим элемент кольца $\Delta\ell$ настолько малый, что его можно считать точечным зарядом. Поскольку кольцо проводящее, то заряд распределен по его длине равномерно и на рассматриваемый элемент приходится заряд величиной: $\Delta q = q \cdot \Delta\ell / (2\pi R)$.

Этот элемент создает в точке A , находящейся на расстоянии x от центра кольца, напряженность поля $\Delta\vec{E}$, причем

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{r^2} = k \frac{\Delta q}{R^2 + x^2}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Проекция вектора $\Delta\vec{E}$ на ось OX равна

$$\Delta E_x = |\Delta\vec{E}| \cdot \cos \alpha = \Delta E \cdot \frac{x}{r} = \frac{kq \cdot \Delta\ell}{2\pi R \cdot (R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot x,$$

а полный вектор напряженности поля, создаваемого кольцом в точке A , равен по модулю

$$E(x) = \frac{kq \cdot 2\pi R}{2\pi R \cdot (R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot x = \frac{kqx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Найдем экстремумы функции $E(x)$. Для этого снова вычислим первую производную:

$$E'(x) = kq \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - x \cdot 3/2 \cdot (R^2 + x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(R^2 + x^2)^3} = 0,$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = \pm R/\sqrt{2}.$$

Нетрудно проверить, что в обеих этих точках функция $E(x)$ имеет максимумы, равные

$$E_{\text{Max}} = E(x_1) = E(x_2) = \frac{2kq}{3\sqrt{3} \cdot R}.$$

Далее строим график функции $E(x)$.

Помимо способа, основанного на использовании теоремы Ферма, в задачах, сводящихся к решению квадратного уравнения, экстремум можно находить как координаты вершины соответствующей уравнению параболы. Покажем этот способ на конкретном примере.

Рис. 3. График зависимости $E(x)$

Задача 3. Каково минимальное расстояние между предметом и его действительным изображением для тонкой линзы с фокусным расстоянием F ?

Решение. Действительное изображение возможно только в собирающей линзе, поэтому согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ где } d \text{ и } f - \text{расстояния от предмета до линзы и от изображения до линзы, соответственно. Вводя обозначение } L \equiv d + f, \text{ перепишем формулу линзы в виде}$$

$\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = \frac{1}{F}$, или $d^2 - L \cdot d + L \cdot F = 0$.

$$\left(d - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L^2}{4} - L \cdot F\right) = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$\left(d - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L^2}{4} - L \cdot F\right) = 0.$$

Видим, что координата вершины параболы равна $d_0 = L/2$; при этом $L_{\min} = 4F$.