DOI: 10.17117/na.2015.09.912

Поступила (Received): 22.09.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.09.912.pdf>

Володин Г.Т., Городничий А.А.
Аналитическое представление функций полезности в
математических моделях экономических задач
динамического программирования

Volodin G.T., Gorodnichiyy A.A.
The analytic representation of utility functions in mathematical
models of economic problems of dynamic programming

В данной статье «Аналитическое представление функций полезности в математических моделях экономических задач динамического программирования» рассматриваются способы применения математических моделей в различных экономических задачах. Рассматриваемые в статье математические модели позволят осуществлять максимально эффективное использование ресурсов

Ключевые слова: функция полезности, динамическое программирование, математическая модель

In this article, "The analytic representation of utility functions in mathematical models of economic problems of dynamic programming" describes how to use mathematical models in different economic problems. Considered in the article mathematical models allow for the most efficient use of resources

Key words: utility function, dynamic programming, mathematical model

Володин Геннадий Тимофеевич

Доктор технических наук, профессор
 Тульский институт экономики и информатики
 г. Тула, ул. Рязанская, 1

Volodin Gennadiy Timofeevich

Doctor of Engineering Sciences, professor
 Tula Institute of economics and informatics
 Tula, Ryazanskaya st., 1

Городничий Александр Александрович

Магистрант
 Тульский институт экономики и информатики
 г. Тула, ул. Рязанская, 1

Gorodnichiyy Alexander Alexandrovich

Master
 Tula Institute of economics and informatics
 Tula, Ryazanskaya st., 1

Известно, что при использовании принципов динамического программирования [1] в конкретной задаче максимизации функции её погружают в некоторое семейство процессов распределения: вместо отыскания решения одной задачи с данным количеством ресурсов и фиксированным числом процессов, рассматривается проблема нахождения решений целого семейства таких задач, в которых x может принимать любые положительные значения и n может принимать любые целые значения [1].

$$R(x_1, x_i, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \quad (1)$$

$$\text{в области } x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = x, (2)$$

Тем самым искусственно развертывают рассматриваемый статический процесс во времени, требуя производить распределение ресурсов в каждую единицу времени: сначала некоторое количество ресурсов назначается n – му процессу, затем $(n-1)$ – му и т.д., т.е. вводится динамический процесс распределения.

Существенную роль при таком подходе играют функции полезности [1], представляющие собой зависимость дохода при i – ом процессе от выделенного для этого процесса количества ресурсов x_i .

Функция полезности $g_i(x_i)$ в самом общем виде представлена на рис. 1

$g(x)$

Рис. 1

Форма этой кривой определяется двумя важными экономическими условиями [1]:

1) Небольшие количества выделенных ресурсов не дают никаких доходов.

2) Дальнейшее, начиная с некоторого уровня, увеличение количеств ресурсов приводит к эффекту насыщения («Закон убывания доходов»)

Представляет интерес при формировании математической модели реальной экономической задачи с использованием функции (1), аналитическое представление функций $g_i(x_i)$, обладающих свойствами 1) ÷ 2).

Найдем аналитическое представление таких функций.

Пусть эффект насыщения (свойство 2) обнаруживается при $x=a$, при этом величина дохода $g(a)=b$ (Рис. 2)

Кроме того, весьма малые (нулевые) ресурсы не приносят никаких доходов (свойство 1). Следовательно, искомая функция $g(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$g(0) = 0, g(a) = b \quad (3)$$

$$g'(0) = 0, g'(a) = 0 \quad (4)$$

где индекс «штрих» означает оператор дифференцирования.

Рис. 2

Будем искать функцию $g(x)$, для которой её производная определяется в виде:

$$g'(x) = Ax(x - a), \quad (5)$$

Определим константу A в этой формуле, подчинив искомую функцию $g(x)$ условиям (3).

Интегрируя (5), получим:

$$g(x) = \frac{A}{3}x^3 - \frac{Aa}{2}x^2 + c \quad (6)$$

Подчиняя функцию (6) условиям (3), найдём:

$$c = 0, A = -\frac{6b}{a^3}$$

и, следовательно:

$$g(x) = b \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{x}{a} \right) \quad (7)$$

Найденная функция удовлетворяет всем условиям (3) – (4), может быть использована при конструировании математических моделей экономических задач на экстремум с использованием принципов динамического программирования.

Список используемых источников:

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 457 с.