DOI: 10.17117/na.2015.09.1126

<http://ucom.ru/doc/na.2015.09.1126.pdf>

Поступила (Received): 24.09.2015

Титов Н.Г., Кузякина М.В., Лебедев К.А. **Применение равенства Маркова для прогнозирования** **уровня воды в реке с крутым падением водотока**

Titov N.G., Kuzyakina M.V., Lebedev K.A.
Application of Markov equation to predict the water level
in the river with a steep drop in the watercourse

Работа посвящена построению математической модели прогноза уровня воды в горной реке (на примере реки Мзымта) на основе теории Марковских процессов с дискретным временем, которая позволяет на основе мониторинга и анализа уровня воды в русле реки горного типа предсказать возможное наводнение

Ключевые слова: цепи Маркова, паводок, река горного типа

We construct a mathematical model of forecasting of water level in a mountain river (on the example of the river Mzymta), based on the theory of Markov processes with discrete time, which allows on the basis of the monitoring and analysis of the level of water in the riverbed of the mountain type to predict possible flooding

Key words: Markov chains, flooding, river mountain type

Титов Николай Георгиевич

Преподаватель

Кубанский государственный университет

г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Titov Nikolay Georgievich

Teacher

Kuban state university

Krasnodar, Stavropolskaya st., 149

Кузякина Марина Викторовна

Кандидат физико-математических наук, преподаватель

Кубанский государственный университет

г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Kuzyakina Marina Viktorovna

Candidate of Physico-mathematical Sciences, teacher

Kuban state university

Krasnodar, Stavropolskaya st., 149

Лебедев Константин Андреевич

Доктор физико-математических наук, профессор

Кубанский государственный университет

г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Lebedev Konstantin Andrevich

Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor

Kuban state university

Krasnodar, Stavropolskaya st., 149

Работа посвящена построению математической модели прогноза уровня воды в горной реке (на примере реки Мзымта) на основе теории Марковских процессов с дискретным временем, которая позволяет на основе мониторинга и анализа уровня воды в русле реки горного типа предсказать возможное наводнение.

Ключевые слова: цепи Маркова, паводок, река горного типа.

Рассмотрение изменения уровня воды в реке с крутым падением водотока, т.е. в горной реке, без учета воздействия внешних факторов, позволяет

определить данный процесс как случайный. Особое место в теории случайных процессов занимают Марковские процессы.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из n состояний полной группы, причем условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s -м испытании система будет находиться в состоянии j , при условии, что после $(s-1)$ -го испытания она находилась в состоянии i , не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.

Переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние j . Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы [1].

Периодичность измерений уровня воды на горной реке Мзымта, составляет каждые 12 часов, т.е. в 8 часов и 20 часов по Московскому времени. Учитывая это обстоятельство, разумно считать цепь Маркова, состоящую из измерений уровня воды в горной реке Мзымта, как цепь Маркова с дискретным временем.

Имеются данные об уровне воды $X^t = \{x_i^t\}$ в горной реке Мзымта за 2008, 2009 года. Основываясь на теорию Марковских цепей и равенство Маркова, существует очевидная возможность прогноза уровня воды в горной реке на восемь дней 2010 года, в качестве примера был принят период с 1 июля по 8 июля 2010 года. Для этого из представленных данных была произведена выборка длиной шестнадцать элементов, по два наблюдения в сутки, с 1 июля по 8 июля 2008, 2009 годов.

Для более детального прогнозирования уровня воды данная выборка была разбита на пять категорий ξ_n (таблица 1).

Таблица 1. разделение уровней воды по категориям

1 категория	$x_i^t \leq 321$
2 категория	$321 < x_i^t \leq 331$
3 категория	$331 < x_i^t \leq 341$
4 категория	$341 < x_i^t < 361$
5 категория	$361 \leq x_i^t$

Категория 1 означает, что в реке воды меньше нормы; категория 2 – уровень воды в реке нормальный; категория 3 – допустимо выше нормы; категория 4 – критическое состояние, условно можно назвать «паводок»; категория 5 – недопустимое состояние уровня воды в реке, условно можно назвать «наводнение».

Под состоянием системы будем понимать, что в каждый дискретный момент времени t процесс принимает одно из значений принадлежащих категории ξ_n , где $n = \{1, 2, \dots, 5\}$, т.е. $x_i^m = \{i \in \xi(n)\}$ – в момент времени $t = m$ случайный процесс принял значение, попадающее в категорию ξ_n .

Случайное событие $x_i^m = \{i \in \xi(n)\}$ означает, что в момент времени $t = m$ в категории ξ_n наблюдается увеличение значений. Тогда система в начальный момент времени $t = 2008$ выглядит следующим образом $S^{2008} = \{A_k\}$, $k = 1..5$, где A_k – количество из 16 наблюдений попавших в k - категорию. Таким образом, система состоит из распределения наблюдений уровня воды по пяти категориям, и изменение состояния системы в моменты времени $t = 2008, 2009, 2010$ связано с переходом данных наблюдений из одной категории в другую. Очевидно, что такая система может принимать конечное число состояний. Система может менять свои состояния в определенные моменты t .

После обработки данных 2009 года была получена матрица $A^{2009} = \{a_{ij}^{2009}\}$, где a_{ij}^{2009} – количество замеров уровней воды, которые принадлежали i - категории в момент времени $t = 2008$ и попали в j -категорию в момент $t = 2009$.

Используя равенство Маркова:

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k P_{ir}(m)P_{rj}(n-m),$$

где $P_{ij}(n)$ - вероятность перехода системы из начального состояния i в конечное состояние j за n шагов, r – промежуточное расстояние между i и j , $P_{ir}(m)$ - вероятность перехода системы из состояния i в промежуточное состояние r за m шагов, $P_{rj}(n-m)$ – вероятность перехода системы из промежуточного состояния r в конечное состояние j за $(n-m)$ шагов, и записав его в матричном виде:

$$A_n = (A_1)^n,$$

где A_1 – матрица перехода из состояния в состояние за один шаг, A_n матрица перехода из состояния в состояние за n шагов, вычислим состояние системы в следующий момент времени $t = 2010$ и сравним полученную матрицу S^{2010} , где $s_i^{2010} = \sum_i a_{ij}^{2010}$, с реальной матрицей S_{real}^{2010} .

Матрицы A_{real}^{2010} и A_{prog}^{2010} отличаются между собой только значениями, расположенными во второй строке. После многочисленных экспериментов была получена вероятность ошибки в среднем 8%. Данное обстоятельство позволяет говорить о высокой согласованности прогнозируемых значений с экспериментальными данными.

Данная статья выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-96518 р_юг_а и является продолжением цикла исследований посвященных математическому моделированию состояния горной реки [3–5].

Список используемых источников:

1. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: КНОРУС, 2010. 351 с.
2. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложение. М.: МЦНМО, 2010. 278 с.
3. Титов Н.Г., Кузякина М.В., Лебедев К.А. Прогноз уровня воды в реке с крутым падением водотока, основанное на фильтрации Кальмана-Бьюси // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. №104.
4. Титов Н.Г., Семенчин Е.А., Кузякина М.В., Лебедев К.А. Сравнительный анализ методов математического моделирования уровня воды в реке горного типа (на примере реки Мзымта) // Фундаментальные исследования. № 12. 2014. Ч. 5. С. 952-957.
5. Titov N.G., Kuzyakina M.V., Lebedev K.A. Su uno della metodologia per la valutazione del danno economico inflitto diluvio fiume tipo mountain trama regione. // Italian Science Review. 2014. 12(21). P. 234-236.

© 2015, Титов Н.Г., Кузякина М.В., Лебедев К.А.
Применение равенства Маркова для
прогнозирования уровня воды в реке с крутым
падением водотока

© 2015, Titov N.G., Kuzyakina M.V., Lebedev K.A.
Application of Markov equation to predict the water
level in the river with a steep drop in the
watercourse