DOI: 10.17117/na.2015.08.1124

Поступила (Received): 30.08.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.08.1124.pdf>**Кадымов В.А.****Некоторые приложения теории течения в тонком пластическом слое к расчету процессов штамповки ребристых пластин****Kadymov V.A.****Some applications of the theory of flow in a thin plastic layer to the calculation of forging processes of ribbed plates**

Ставится и решается задача течения в тонком пластическом слое, моделирующая технологический процесс штамповки ребристых поковок. Представлены конкретные примеры

Ключевые слова: пластическое течение, тонкий слой, контактное трение

It is formulated and solved the problems of plastic layers flow, which are the models for edge details stamping processes

Key words: plastic flow, thin layer, contact friction

Кадымов Вагид Ахмедович

*Доктор физико-математических наук, профессор
Московский государственный гуманитарно-
экономический университет
г. Москва, ул. Лосиноостровская, 49*

Kadymov Vagid Akhmedovich

*Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor
Moscow state humanitarian and economic university
Moscow, Losinoostrovskaya st.,49*

В работе представлено одно из приложений теории течения в тонком пластическом слое в изложении А.А. Ильюшина [1, 2] к расчету и проектированию технологических задач штамповки ребристых пластин. Посредством сжатия пластического слоя между сближающимися жесткими плитами, в которых (с одной, либо с двух сторон) расположены пазы ширины порядка толщины слоя и вырезаны по определенному контуру, получают ребристые пластины с требуемым расположением ребер в конечном изделии. Известно, что в процессах пластического течения в тонком слое постоянной толщины линии тока представляют прямые, ортогональные к линиям уровня, вдоль которых контактное давление в слое принимает постоянное значение. И потому знание линий уровня помогает восстановить картину линий тока. С другой стороны, количество металла, затекающего в полость штампа под ребро жесткости поковки, оказывается пропорциональным длине соответствующей линии тока, отсчитываемой от точки ветвления течения. Отметим также процессы прессования тонких цилиндрических оболочек методом истечения, при котором металл выдавливается из цилиндрического контейнера, в плоском дне которого имеется щель заданной ширины и соответствующего профиля. Оказывается

возможным оптимально подобрать форму дна контейнера в соответствии с формой профиля выдавливаемой оболочки [1, с. 245-276], при котором обеспечивается свободное затекание металла в щель по всему контуру. Последнее достигается, если ширина щели будет пропорциональна расходу металла в каждой точке щели. В результате уменьшается вероятность образования трещин и разрушения оболочки, уменьшается ее коробление. Таким образом, задача восстановления условного контура (это другое название линии уровня, встречающееся в литературе) имеет большое значение для исследования процесса формоизменения ребристых штампованных поковок.

Ниже дается полное решение задачи восстановления условного контура по известному закону изменения контактного давления вдоль действительного контура [3, 4].

Пусть на некоторой линии $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$ в области течения задано контактное давление $p(x, y)|_{\Gamma} = p(x(s), y(s)) = p_{\Gamma}(s)$. Получим формулу для определения угла $\theta(s)$, образуемого линией тока с линией Γ в произвольной точке $A(x(s), y(s)) \in \Gamma$. Скорость изменения контактного давления вдоль линии Γ имеет вид:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds},$$

или с учетом уравнений равновесия в тонком пластическом слое

$$\frac{dp_{\Gamma}(s)}{ds} = \text{grad} p \cdot \vec{t} = -\frac{2\tau_s}{h} \left(\vec{v}^o, \vec{t} \right),$$

откуда

$$\cos \theta(s) = \left(\vec{v}^o, \vec{t} \right) = \frac{\left(\vec{v}^o, \vec{t} \right)}{|\vec{t}|} = -\frac{h}{2\tau_s} \frac{dp_{\Gamma}/ds}{|\vec{t}|} = -\frac{h}{2\tau_s} \frac{dp_{\Gamma}/ds}{\sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2}} \quad (1)$$

Здесь $\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$ - вектор касательной к линии Γ в точке A , а $\vec{v}^o = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ - единичный вектор скорости течения. Если s - естественный параметр (длина дуги вдоль действительного контура), то $|\vec{t}| = \sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} = 1$. В частном случае, когда Γ совпадает с осью ox ($s \equiv x$), формула (1) принимает вид

$$\cos \theta(x) = -\frac{h}{2\tau_s} \frac{dp_{\Gamma}}{dx} \quad (1)'$$

Для определенности примем, что $p_{\Gamma}(x)$ возрастает вдоль ox ($dp_{\Gamma}/dx > 0$). Требуется восстановить линию условного контура Γ_0 , на которой $p = p_0 = p_{\Gamma}(0)$. Как известно, в задачах течения пластических слоев постоянной толщины линии тока представляют прямые. Выберем произвольную точку $C(x; 0)$ на действительном контуре Γ . Определим, согласно (1), угол $\theta(x)$ меж-

ду линией тока и линией Γ в точке C и проведем соответствующую линию тока (рис.1). Пусть $A(X,Y)$ - точка пересечения указанной линии тока с неизвестной линией условного контура Γ_0 , на которой контактное давление $p = p_0$. Как следует из чертежа, $p(A) < p(C)$, и вдоль линии тока уравнение равновесия принимает вид:

Рис. 2. К задаче о восстановлении линии условного контура

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{2\tau_s}{h}, \\ p(A) - p(C) &= -\frac{2\tau_s}{h} AC, \\ p(X;Y) \equiv p(A) &= p(C) - \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(X-x)^2 + Y^2}, \\ p_0 &= p_\Gamma(x) - \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(X-x)^2 + Y^2} \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, из рис.1 имеем:

$$\cos \theta(x) = \frac{-(x-X)}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}} \quad (3)$$

Исключая Y из (2) и (3), получаем:

$$X(x) = x + \frac{h}{2\tau_s} [p_\Gamma(x) - p_0] \cos \theta(x), \quad (4)$$

и соответственно

$$Y(x) = -(x-X) \operatorname{tg} \theta(x),$$

или после подстановки (4)

$$Y(x) = \frac{h}{2\tau_s} [p_\Gamma(x) - p_0] \sin \theta(x) \quad (5)$$

Таким образом, по заданной линии действительного контура Γ (совпадающей с осью ox) мы восстановили линию условного контура Γ_0 в виде формул (4) и (5). С учетом (1) уравнение линии условного контура принимает вид:

$$X(x) = x - \frac{h^2}{4\tau_s^2} [p_\Gamma(x) - p_0] \frac{dp_\Gamma(x)}{dx}, \quad (4)'$$

$$Y(x) = \frac{h}{2\tau_s} [p_\Gamma(x) - p_0] \sqrt{1 - \frac{h^2}{4\tau_s^2} \left(\frac{dp_\Gamma}{dx} \right)^2} \quad (5)'$$

Обобщим формулы (4)', (5)' на случай, когда действительный контур Γ задан в виде $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$ и $p|_\Gamma = p_\Gamma(s)$. Пусть $C(x(s); y(s))$ - произвольная точка на Γ . Находим, согласно (1), угол $\theta(s)$ между линией тока и линией Γ в точке C (рис.2). С другой стороны, имеем уравнение относительно угла $\varphi(s)$ наклона Γ с осью ox :

Рис. 3. К задаче о восстановлении линии условного контура в общем случае

$$\operatorname{tg} \varphi(s) = \frac{dy/ds}{dx/ds} \quad (6)$$

Интегрируя уравнение равновесия вдоль линии тока, имеем:

$$p_0 = p_\Gamma(s) - \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} \quad (7)$$

Угол наклона $\theta(s) + \varphi(s)$ линии тока к оси ox определяется из условия

$$\cos[\theta(s) + \varphi(s)] = \frac{-(x - X)}{\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}} \quad (8)$$

Исключая Y из (7) и (8), получаем:

$$X(s) = x(s) + \frac{h}{2\tau_s} [p_r(s) - p_0] \cos(\theta + \varphi), \quad (9)$$

и соответственно

$$Y(s) = y(s) + \frac{h}{2\tau_s} [p_r(s) - p_0] \sin(\theta + \varphi) \quad (10)$$

Рассмотрим примеры.

1. Пусть линия действительного контура совпадает с осью ox и на ней задано контактное давление $p_r(x) = k(x+1)$. В этом случае формулы (4)' и (5)' определяют линии условного контура:

$$X(x) = x - \frac{h^2 k^2}{4\tau_s^2} x = x \left(1 - \frac{h^2 k^2}{4\tau_s^2} \right),$$

$$Y(x) = \frac{hk}{2\tau_s} x \sqrt{1 - \frac{h^2 k^2}{4\tau_s^2}}$$

Очевидно, что линия условного контура есть прямая.

2. Пусть линия действительного контура совпадает с осью ox и на ней задано контактное давление $p_r(x) = k(x+1)^2$. Из (4)' и (5)' определяем линию условного контура:

$$X(x) = x - \frac{h^2 k^2}{2\tau_s^2} x(x+1)(x+2),$$

$$Y(x) = \frac{hk}{2\tau_s} x(x+2) \sqrt{1 - \frac{h^2 k^2}{\tau_s^2} (x+1)^2}.$$

Отметим, что в [5] обобщаются рассмотренные выше контактные задачи течения пластических слоев на случай учета упругой деформируемости тел инструмента.

Список используемых источников:

1. Ильющин А.А. Труды (1946-1966). Т. 2 Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
2. Кийко И.А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
3. Костарев И.В., Соломонов К.Н. Черная металлургия. 1983. №5. С. 58-60.
4. Кадымов В.А., Милов В.А. Некоторые прямые и обратные задачи течения тонких пластических слоев // Вестн. ТулГУ. 2010. Т. 16. Вып. 1. С. 54-58.
5. Кадымов В.А., Быстриков С.К. Некоторые новые решения нестационарных задач растекания пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям // Изв. ТулГУ. 2006. Т. 12. Вып. 2. С. 54-60.