DOI: 10.17117/na.2015.08.1116

<http://ucom.ru/doc/na.2015.08.1116.pdf>

Поступила (Received): 29.08.2015

Кадымов В.А. Некоторые точные решения осесимметричных контактных задач пластического течения в тонком слое

Kadymov V.A.
Some exact solutions of contact problems
of plastic flow in a thin layer

В работе приводятся постановки краевых задач течения в тонком пластическом слое, используемые в практике расчета технологических процессов обработки материалов давлением. Представлены точные решения контактных задач пластического течения, проводится их анализ

Ключевые слова: пластическое течение, контактное трение, краевая задача

Кадымов Вагид Ахмедович

Доктор физико-математических наук, профессор
Московский государственный гуманитарно-
экономический университет
г. Москва, ул. Лосиноостровская, 49

The formulation of boundary-value problems of flow in a thin plastic layer used in the practice of calculation of technological processes of material treatment by pressure is presented. The exact solutions of contact problems of plastic flow are given and their analysis is conducted

Key words: plastic flow, contact friction, boundary value problem

Kadymov Vagid Akhmedovich

Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor
Moscow state humanitarian and economic university
Moscow, Losinoostrovskaya st., 49

1.1. Постановка краевой задачи об осадке и растекании тонкого пластического слоя на плоскости.

Пусть слой из идеально-пластического материала сжимается между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис.1).

Основные уравнения в плоскости течения имеют вид[1,2,3,4]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (1.2)$$

где p, u, v – контактное давление и компоненты скорости течения;
 $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ – предел текучести пластического материала; $h = h(t)$ – известный за-

кон изменения толщины слоя. Величина $\lambda(t) = \ln(h(t_0)/h(t))$ характеризует степень деформации, где t_0 - некоторый начальный момент времени.

Рис.1. Растекание пластического образца в поперечном разрезе (а), и в плане (б)

На свободной (подвижной), заранее неизвестной, границе $\Gamma_\sigma: F(x, y, t) = 0$ задаются три граничных условия: динамическое условие равенства нулю вектора напряжений

$$\sigma^{(n)} = \sigma \cdot \vec{n} = 0,$$

эквивалентное двум скалярным

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0, \quad \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0, \quad (1.3)$$

где $\vec{n} = (n_x, n_y) = \nabla F / |\nabla F|$ - вектор нормали к границе, а компоненты тензора напряжений σ имеют вид

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{yy} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y},$$

а также кинематическое условие «материальности» границы

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial F / \partial t}{|\nabla F|}, \quad (1.4)$$

из которого определяется движение свободной границы.

На неподвижной (непроницаемой) границе $\Gamma_c: G(x, y, t) = 0$ задаются два условия: динамическое условие равенства предельному значению величины тангенциальной составляющей вектора напряжений

$$\left| \frac{\Gamma}{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau} \right| = \left| \sigma_{xx} n_x n_y + \sigma_{xy} (n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy} n_x n_y \right| = \tau_s \quad (1.5)$$

где $\vec{\tau} = (n_y, -n_x)$ касательный к границе вектор, и кинематическое условие непроницаемости стенки

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.6)$$

Условий (1.3)-(1.6) достаточно для решения краевой задачи с подвижными и неподвижными границами в области течения, описываемого системой уравнений (1.1)-(1.2).

Чтобы перейти к безразмерному описанию задачи, определим характерные величины длины l_0 , скорости $v_0 = -(dh(t=t_0)/dt)/\varepsilon$ и контактного давления $p_0 = \sigma_s/\varepsilon$, где $\varepsilon = h_0/l_0 \ll 1$ – малый параметр, характеризующий относительную толщину пластического слоя (толщина слоя обезразмеривается на h_0 , время на l_0/v_0). Тогда, в безразмерных величинах уравнения (1.1)-(1.2) будут иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta u - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta v - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda', \quad (1.8)$$

где $\lambda' = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$. Отметим наличие малого параметра ε в членах со старшими производными.

1.2. Постановка задачи в рамках модели «идеальной жидкости».

В упрощенной модели «идеальной жидкости» ($\varepsilon = 0$) уравнения (1.7)-(1.8) имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda', \quad (1.9)$$

Эта система уравнений имеет более низкий порядок и вследствие этого требует меньшего количества граничных условий.

2.1. Решение осесимметричной задачи о пластической осадке и растекании тонкого кольцевого слоя.

Пластический слой толщины $h = h(t)$ формы кольца в плане ($a \leq r \leq b$) осаживается между параллельно сближающимися шероховатыми плоскостями массивных плит (рис.2). Внутренний контур $a = a_0 = \text{const}$ образован пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает металл, а внешний контур $r = b(t)$ свободен от нагрузок. Уравнения краевой задачи:

Рис. 2. Растекание кольцевого пластического слоя

$$\text{grad} p = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}; \quad \text{div} \mathbf{r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.1)$$

и условия на контуре

$$r = a_0 : p(r, t) = 2\sigma_s; \quad r = b(t) : p(r, t) = \sigma_s. \quad (2.2)$$

Решение задачи о свободном растекании кольцевого пластического слоя в модели «идеальной жидкости» имеет вид:

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \quad (2.3)$$

$$p(r, t) = \begin{cases} 2\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(r - a_0), & a_0 < r < r_0(t) \\ \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(b - r), & r_0(t) < r < b(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

где $r = r_0(t)$ - неизвестная линия ветвления течения, на которой $u(r_0, t) = 0$ и которая находится из условия непрерывности контактного давления в точках ребра поверхности давления:

$$r_0(t) = \frac{2(b + a_0) - \sqrt{3}h}{4} = \frac{b + a_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}h \approx \frac{b + a_0}{2} \quad (2.5)$$

При этом мы учли, что $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$, а также приняли предположение о тонкости слоя ($h/a_0 = 1$).

И в завершение выпишем в неявном виде закон изменения свободной границы $r = b(t)$:

$$\left(\frac{b - a_0}{b_0 - a_0} \right)^2 \left(\frac{3b + a_0}{3b_0 + a_0} \right)^{2/3} = \frac{h_0}{h(t)}. \quad (2.6)$$

2.2. Решение осесимметричной задачи о пластической осадке и растекании тонкого кольцевого слоя в модели «вязкой жидкости».

Поставим предыдущую задачу в модели «вязкой жидкости»:

$$\operatorname{grad} p = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta \mathbf{v} - \frac{2\tau_s}{h} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{|\dot{\mathbf{v}}|}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.7)$$

$$r = a_0 : \sigma_{rr} = -p + \frac{2}{3} \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial r} = -k \sigma_s, (0 < k \leq 1)$$

$$r = b(t) : \sigma_{rr} = -p + \frac{2}{3} \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (2.8)$$

Решение задачи имеет вид (при $k = 1$):

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right), \quad (2.9)$$

$$p(r, t) = \begin{cases} p_a + \frac{2\tau_s}{h} (r - a_0), & a_0 < r < r_0(t) \\ p_b + \frac{2\tau_s}{h} (b - r), & r_0(t) < r < b(t) \end{cases}, \quad (2.10)$$

причем

$$p_a = \sigma_s \left[2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^2 \right], \quad p_b = \sigma_s \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{b} \right)^2 \right],$$

$$r_0(t) = \frac{b + a_0}{2} - \frac{\sqrt{3}h}{4} \left[-1 + \frac{r_0^2(a_0^2 - b^2)}{3b^2 a_0^2} \right].$$

В предположениях тонкости слоя ($h/a_0 \ll 1$) последнее соотношение относительно линии ветвления течения принимает вид, ранее выведенный нами для упрощенной модели «идеальной жидкости»:

$$r_0(t) \approx \frac{b + a_0}{2}.$$

Закон изменения свободной границы $r = b(t)$ остается без изменения:

$$\left(\frac{b - a_0}{b_0 - a_0} \right)^2 \left(\frac{3b + a_0}{3b_0 + a_0} \right)^{2/3} = \frac{h_0}{h(t)}. \quad (2.11)$$

Таким образом, все характеристики, найденные в задаче на основе двух моделей, оказались близкими между собой, что и следовало ожидать – в силу осесимметричности задачи отсутствуют касательные напряжения, проявляющие вязкие свойства.

2.3. Осесимметричная задача об осадке и свободном растекании неоднородного пластического слоя в круговой области.

Рассматривается задача об осадке и растекании пластического слоя постоянной толщины $h = h(t)$ с неоднородными пластическими свойствами

$$\sigma_s(r) = \begin{cases} \sigma_{s1}, 0 \leq r < a(t) \\ \sigma_{s2}, a(t) < r < b(t) \end{cases}$$

так что выполняются уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_{sk}}{h}, (k=1,2); \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.12)$$

и краевые условия

$$r=0: u(0,t)=0; \quad r=b(t): p(b,t)=\sigma_{s2} \quad (2.13)$$

Решение задачи в упрощенной постановке имеет вид:

$$u(r,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} r \quad (2.14)$$

$$p(r,t) = \begin{cases} \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h}(b-r), a < r < b \\ \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h}(b-a) + \frac{2\tau_{s1}}{h}(a-r), 0 < r < a \end{cases} \quad (2.15)$$

причем

$$a(t) = a_0 \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}}; \quad b(t) = b_0 \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}} \quad (2.16)$$

Как видно из (2.14), (2.15), кинематика не зависит от пластических свойств среды, а контактное давление убывает по линейному закону, принимая максимальное значение в центре круга:

$$p_{\max} = p(0,t) = \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h}(b-a) + \frac{2\tau_{s1}}{h}a$$

Отметим, что решение представленной выше задачи в модели «вязкой жидкости» совпадает с выписанным выше решением в силу того, что все уравнения краевой задачи сохраняют прежний вид:

$$(\Delta \mathbf{v})_r = \Delta u - \frac{u}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} (\Delta \mathbf{v})_r - \frac{2\tau_{sk}}{h} = -\frac{2\tau_{sk}}{h}$$

$$r=b(t): \sigma_{rr} = -p_b + \frac{2}{3}\sigma_{s2} + \frac{2}{3}\sigma_{s2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow p_b = p(b,t) = \sigma_{s2}$$

2.4. Осесимметричная задача о пластической осадке при сложном нагружении неоднородного кругового слоя.

Рассматривается процесс осадки пластического слоя с неоднородными свойствами

$$\sigma_s(r) = \begin{cases} \sigma_{s1}, 0 \leq r < a(t) \\ \sigma_{s2}, a(t) < r < b(t) \end{cases}$$

между параллельно сближающимися и вращающимися друг относительно друга шероховатыми плоскостями массивных плит:

$$\text{grad} p = -\frac{\tau_{sk}}{h} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}_1|} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}_2|} \right), \quad \text{div} \mathbf{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{v}_1 = r\omega(t)\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{v}_2 \equiv 0$ - скорости внутренних движений тел инструмента.

Уравнения(2.17) в скалярном виде:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\tau_{sk}}{h} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + (v - \omega r)^2}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial p}{r \partial \varphi} = -\frac{\tau_{sk}}{h} \left(\frac{v - r\omega}{\sqrt{u^2 + (v - \omega r)^2}} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.20)$$

вместе с краевыми условиями

$$r = 0 : u(0, t) = 0, \quad r = b(t) : p(b, t) = \sigma_{s2} \quad (2.21)$$

дают решение:

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} r; \quad v = \frac{r\omega}{2} \quad (2.22)$$

$$p(r, t) = \begin{cases} \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h} \frac{\frac{d\lambda}{dt}(b-r)}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \omega^2}}, & a < r < b \\ \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h} \frac{\frac{d\lambda}{dt}(b-a)}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \omega^2}} + \frac{2\tau_{s1}}{h} \frac{\frac{d\lambda}{dt}(a-r)}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \omega^2}}, & 0 < r < a \end{cases}$$

Вводя безразмерные параметры $\varepsilon = \frac{h_0}{b_0}$, $\bar{\omega} = \omega(t) / \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)$, $\delta = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}$, харак-

теризующие соответственно тонкость слоя, относительное вращение тел инструмента и степень неоднородности пластических свойств среды, перепишем последнюю зависимость для контактного давления в безразмерных величинах:

$$\bar{p}(\bar{r}, t) = \frac{p}{\sigma_{s2}} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\bar{b} - \bar{r}}{\bar{h}\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}, & \bar{a} < \bar{r} < \bar{b} \\ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\bar{b} - \bar{a}}{\bar{h}\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}} \left(\frac{\bar{a} - \bar{r}}{\bar{h}\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}, & 0 < \bar{r} < \bar{a} \end{cases} \quad (2.23)$$

где введены обозначения $\bar{b} = \frac{b}{b_0}$, $\bar{a} = \frac{a}{b_0}$, $\bar{r} = \frac{r}{b_0}$, $\bar{h} = \frac{h}{h_0}$.

Соотношение (2.23), в частности, показывает, что максимальное значение контактного давления $\bar{p}_{\max} = \bar{p}(0, t)$ монотонно убывает по переменным ε , $\bar{\omega}$, возрастает по переменной δ .

Список используемых источников:

1. Ильющин А.А. Труды (1946-1966). Т. 2 Пластичность // Физматлит, 2004. 480 с.
2. Кийко И.А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
3. Белов Н.А., Кадымов В.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Известия РАН. МТТ. 2011. №1. С. 46-58.
4. Кадымов В.А. К решению нестационарных задач растекания пластических слоев // Изв.ТулГУ. 2005. Т. 11. Вып. 2. С. 40-45.

© 2015, Кадымов В.А.

*Некоторые точные решения осесимметричных
контактных задач пластического течения в
тонком слое*

© 2015, Kadymov V.A.

*Some exact solutions of contact problems of plastic
flow in a thin layer*